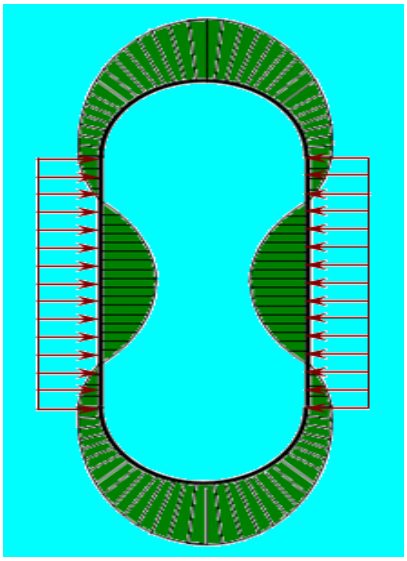
PAVEL TRIPA

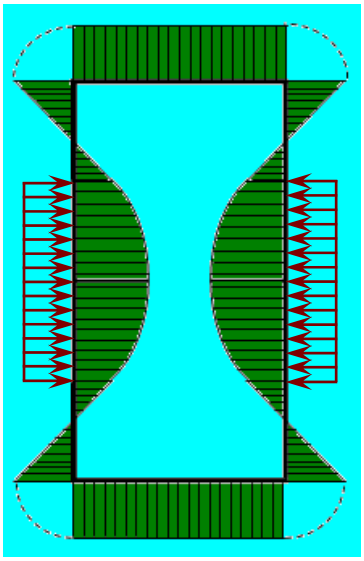
MIHAI HLUŞCU

REZISTENȚA MATERIALELOR

NOȚIUNI FUNDAMENTALE ŞI APLICAȚII

* *





Editura MIRTON
Timişoara
2007

Dacă ceea ce ai făcut pare simplu,
înseamnă că nu ai aflat încă totul.
(Donald Westlake)

Prefață

În anul 2001, respectiv 2002, apare în 2 volume (407 pagini) la Editura MIRTON din Timişoara lucrarea *"Etape şi modele de rezolvare a problemelor de rezistența materialelor"* avându-l ca autor pe Pavel TRIPA.

Experiența ulterioară a dovedit că lucrarea la care am făcut referire mai sus, prezenta un neajuns şi anume acela că nu punea la dispoziția celor interesați probleme nerezolvate, probleme propuse pentru rezolvare. Rezolvând singur astfel de probleme, te poți verifica în legătură cu însuşirea şi înțelegerea noțiunilor de rezistența materialelor.

Ca urmare, s-a impus completarea lucrării *"Etape şi modele de rezolvare a problemelor de rezistența materialelor"* cu un capitol care să conțină probleme propuse pentru a fi rezolvate. Această problemă a fost parțial rezolvată prin apariția în anul 2006 la Editura MIRTON din Timişoara, într-un prim volum, a lucrării *"Rezistența materialelor. Noțiuni fundamentale şi aplicații"* autori fiind Pavel TRIPA şi Mihai HLUŞCU, cadre didactice la Universitatea "POLITEHNICA" din Timişoara, Facultatea de Mecanică.

Prezenta lucrare este cel de-al II-lea volum din *"Rezistența materialelor. Noțiuni fundamentale şi aplicații"* al aceloraşi autori în care sunt tratate capitolele: *încovoierea oblică, solicitările compuse, calculul deformațiilor şi a sistemelor static nedeterminate utilizând metoda Mohr – Maxwell, tensiuni la bare curbe plane, flambajul barelor zvelte solicitate la compresiune, solicitarea prin şoc, oboseala materialelor.*

Ca şi în precedentul volum, în primele 7 capitole, la începutul fiecăruia se prezintă *noțiunile teoretice fundamentale* obligatoriu a fi cunoscute în vederea abordării calculelor de rezistență. După prezentarea noțiunilor teoretice fundamentale sunt prezentate *etapele* ce trebuie parcurse în calculul de rezistență, specifice fiecărui capitol. În continuare, la fiecare capitol sunt prezentate *probleme rezolvate*, urmând pas cu pas etapele recomandate a fi parcurse. Ultimul capitol al lucrării (Capitolul 8) *propune* pentru fiecare din celelalte 7 capitole, un număr mare de *aplicații* (probleme) spre a fi rezolvate, la care se dau rezultatele finale şi de multe ori şi rezultatele intermediare, pentru a se putea verifica pe parcurs rezolvarea problemei. Problemele sunt prezentate, în general, într-un mod gradat din punct de vedere al dificultății de rezolvare, de la cele mai simple spre cele cu un grad ridicat de dificultate.

Întreaga lucrare *"Rezistența materialelor. Noțiuni fundamentale şi aplicații"* (Vol. 1 + 2), se adresează în primul rând studenților de la facultățile tenice care studiază disciplina de *Rezistența materialelor*, în vederea pregătirii lor profesionale şi mai ales a examenului la această disciplină. Această lucrare constituie în acelaşi timp şi material de curs la *Rezistența materialelor,* mai ales pentru specializările cu un număr de ore mai redus la această disciplină.

Acest material este foarte util şi proiectanților de elemente şi structuri de rezistență, care de cele mai multe ori din comoditate, dar mai ales din nestăpânirea corespunzătoare a metodologiei calculului de rezistență şi deformabilitate, nu fac astfel de calcule.

De asemenea, această lucrare având un număr foarte mare de probleme, constituie o bază de pregătire pentru studenții care participă la *Concursul profesional studențesc „C. C. Teodorescu"* la disciplina de *Rezistența materialelor,* atât la faza locală cât şi la cea națională.

Elaborarea acestei lucrări se bazează în primul rând pe experiența acumulată de autori cu studenții şi a activității lor în producție înainte de activarea lor în învățământul superior, perioadă ce cuprinde peste 30 de ani.

Ca de fiecare dată, la apariția unei noi lucrări pot apărea unele neajunsuri care să nu satisfacă pe deplin pe cei interesați. Autorii, ca de fiecare dată, sunt recunoscători acelora care vor binevoi a lectura această lucrare şi vor veni cu propuneri şi sugestii în vederea îmbunătățirii conținutului acesteia, prezentării grafice etc., astfel încât să rezulte o lucrare utilă, de care la ora actuală considerăm că este mare nevoie.

Totodată, autorii mulțumesc domnilor Prof. Dr. Euro. Ing. Tiberiu BABEU, membru titular al Academiei de Ştiințe Tehnice din România şi Prof. Dr. Ing. Nicolae NEGUȚ, decan al Facultății de Mecanică din Timişoara, pentru bunăvoința şi răbdarea de a lectura această lucrare, pentru sugestiile făcute şi pentru acceptarea de a o recenza ştiințific.

Timişoara
Februarie, 2007

Autorii

1. CALCULUL DE REZISTENȚĂ LA ÎNCOVOIERE OBLICĂ

1.1. Considerații generale. Etape de calcul

Într-o secțiune transversală a unui element de rezistență se realizează o ***solicitare de încovoiere oblică***, atunci când în secțiunea respectivă acționează un moment încovoietor M_i, care nu este orientat după nici una din direcțiile principale de inerție ale secțiunii (Fig.1.1-1).

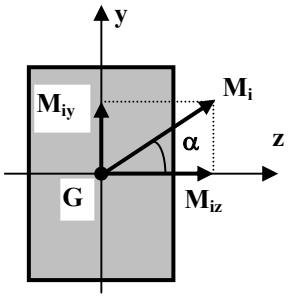
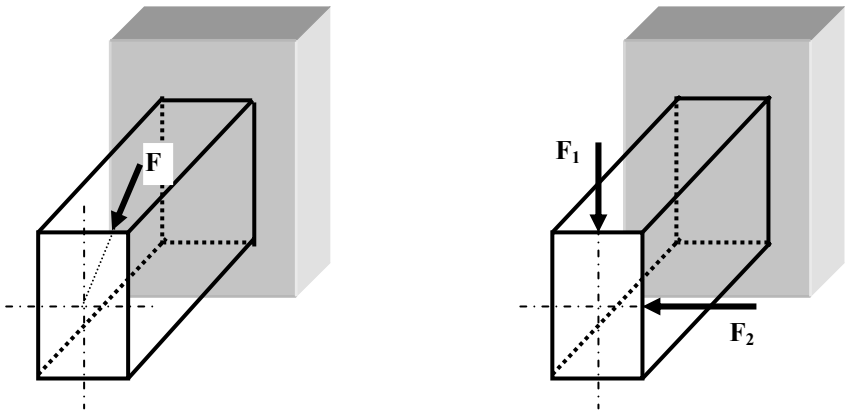


Fig.1.1-1

O astfel de solicitare rezultă în cazul elementelor de rezistență solicitate de forțe a căror plane trec prin axa geometrică (Fig.1.1-2a), sau forțele sunt în plane perpendiculare, plane care trec prin axa geometrică (Fig.1.1-2b) a barei.



a) **b)**

Fig.1.1-2

Dacă direcţiile principale de inerţie sunt axele Gz, respectiv Gy, în cazul încovoierii oblice, momentul încovoietor M_i se descompune în două componente orientate după direcţiile principale de inerţie, rezultând M_{iz}, respectiv M_{iy} (Fig.1.1-1).

Deoarece, atât M_{iz} cât şi M_{iy}, produc tensiuni normale σ, rezultă că într-un punct K dintr-o secţiune solicitată la încovoiere oblică, tensiunea rezultantă, se calculează cu relaţia:

$$\sigma_K = \pm \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_K \pm \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_K \qquad 1.1\text{-}1$$

unde:

y_K şi z_K - coordonatele punctului K, faţă de sistemul principal de inerţie zGy,

I_z şi I_y - momentele de inerţie axiale (principale) faţă de direcţiile principale de inerţie Gz, respectiv Gy.

Semnul + sau -, se pune în funcţie de cum zona în care se află punctul K, este întinsă sau comprimată.

Din relaţia 1.1-1, rezultă că într-o secţiune, tensiunea normală σ este maximă în punctele cele mai îndepărtate atât de direcţia principală Gz cât şi de direcţia principală Gy. Pentru o secţiune dreptunghiulară (sau formată din suprafeţe dreptunghiulare), acest punct K, se află într-un colţ al secţiunii, iar pentru secţiuni circulare, acest punct este situat pe fibra exterioară a secţiunii.

Variaţia tensiunii normale σ pe o secţiune solicitată la încovoiere oblică este liniară. Pentru a reprezenta grafic variaţia tensiunii normale σ la o solicitare de încovoiere oblică, trebuie determinată poziţia ***axei neutre***. *Axa neutră reprezintă locul geometric al punctelor din secţiunea transversală a elementului de rezistenţă, în care tensiunea normală σ este nulă.*

Ecuaţia axei neutre pentru încovoierea oblică, rezultă din relaţia 1.1-1:

$$\sigma = 0$$

de unde rezultă:

$$\sigma_K = \pm \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_K \pm \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_K = 0 \qquad 1.1\text{-}2$$

În sistemul de axe principal zGy, relația 1.1-2 este o dreaptă, care poate fi scrisă şi sub altă formă:

$$\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y = \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z \qquad 1.1\text{-}3a$$

sau

$$\frac{y}{z} = -\frac{M_{iy}}{M_{iz}} \cdot \frac{I_z}{I_y} \qquad 1.1\text{-}3b$$

unde:

y, z - reprezintă coordonatele punctelor situate pe axa neutră.

Analizând relația 1.1-3a, se constată că dacă y = 0, rezultă z = 0 ceea ce înseamnă că axa neutră la solicitarea de încovoiere oblică, trece prin centrul de greutate G al secțiunii (originea sistemului principal de inerție).

Pentru a reprezenta axa neutră pe secțiune, se pot utiliza două procedee:

a) Se mai determină încă un punct (pe lângă G), punct prin care trece axa neutră. Pentru aceasta, în relația 1.1-3a sau 1.1-3b, se dă o valoare lui y ($y = y_1$) şi se calculează z_1. Rezultă astfel, cel de-al doilea punct de pe axa neutră, de coordonate (z_1; y_1). Prin G şi acest punct de coordonate (z_1; y_1) se duce axa neutră (o dreaptă).

b) De cele mai multe ori, axa neutră se reprezintă după ce s-a determinat panta acesteea (unghiul β, făcut de axa neutră cu direcția principală Gz; Fig.1.1-3).

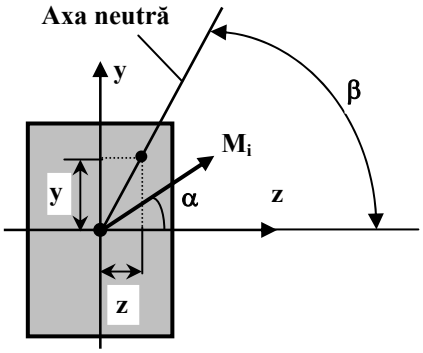


Fig.1.1-3

Din Fig.1.1-3, se poate constata, că:

$$\frac{y}{z} = tg\beta \qquad 1.1\text{-}4a$$

şi

$$\frac{M_{iy}}{M_z} = tg\alpha \qquad 1.1\text{-}4b$$

Cu relațiile 1.1-4a şi 1.1-4b, relația 1.1-3b, capătă forma:

$$tg\beta = \frac{I_z}{I_y} \cdot tg\alpha \qquad 1.1\text{-}5$$

de unde rezultă, unghiul β făcut de axa neutră cu direcția principală de inerție Gz:

$$|\beta| = arctg\left(\left|\frac{I_z}{I_y} \cdot tg\alpha\right|\right) \qquad 1.1\text{-}6$$

Dacă:

$$I_z > I_y \;\Rightarrow |\beta| > |\alpha| \qquad 1.1\text{-}7a$$

$$I_z < I_y \;\Rightarrow |\beta| < |\alpha| \qquad 1.1\text{-}7b$$

$$I_z = I_y \;\Rightarrow |\beta| = |\alpha| \qquad 1.1\text{-}7c$$

Din relația 1.1-7c, rezultă că pentru secțiuni circulare (unde $I_z = I_y$), direcția axei neutre, coincide cu direcția momentului încovoietor M_i, ($M_i \equiv M_{i,rez}$):

$$M_i \equiv M_{i,rez} = \sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2} \qquad 1.1\text{-}8$$

Această constatare, conduce la concluzia că, pentru o secțiune circulară, punctele cele mai solicitate (cele mai depărtate de axa neutră), sunt punctele cele mai depărtate de direcția momentului încovoietor $M_{i,rez}$. Se poate atunci calcula tensiunea normală maximă σ_{max}, pentru secțiunea circulară, cu relația:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i,rez}}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{M_{i,rez}}{W_z} \equiv \frac{M_{i,rez}}{W_y} \qquad 1.1\text{-}9$$

Calculul la încovoiere oblică, se face exclusiv din condiția de rezistență a elementului. Relațiile de calcul utilizate, sunt prezentate în Tabelul 1.1-1.

Pentru calculul de rezistență, trebuie stabilită secțiunea periculoasă, precum şi punctele cele mai solicitate din această secțiune.

Tabelul 1.1-1

Tipul problemei	**Secțiune necirculară**	**Secțiune circulară**
De verificare	$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z \le \sigma_a$	$\sigma_{max} = \frac{M_{i,rez}}{W_z} \le \sigma_a$
De dimensionare	$\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z = \sigma_a$	$W_z = \frac{M_{i,rez}}{\sigma_a} = \ldots$
De effort capabil	$\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z = \sigma_a$	$M_{i,cap} = M_{i,rez} = W_z \cdot \sigma_a = \ldots$

Pentru calculul de rezistență la încovoiere oblică, se parcurg următoarele **etape**:

- Se reprezintă elementul de rezistență numai prin axa sa geometrică
- Se reduc toate forțele (concentrate, distribuite, momente) în centrul de greutate al secțiunii în care ele acționează. Dacă forțele concentrate şi cele distribuite nu au direcția axelor principale de inerție, ele se descompun în componente orientate după direcțiile principale de inerție. Componentele

obținute prin reducerea în centrul de greutate al secțiunii, se pun pe elementul de rezistență reprezentat numai prin axa sa geometrică. Se obține astfel un element de rezistență reprezentat numai prin axa sa geometrică, încărcat cu forțe în plane perpendiculare (asemănător cu barele drepte orizontale încărcate cu forțe, dar în două plane).

- Pentru sistemul obținut, se trasează diagramele de eforturi. Rezultă numai diagrame de momente încovoietoare (M_{iz}, M_{iy}) în două plane perpendiculare.
- Din analiza diagramelor de momente încovoietoare şi a variației secțiunii în lungul elementului de rezistență, se stabileşte secțiunea periculoasă.
- Se desenează secțiunea periculoasă. În secțiunea periculoasă, dacă aceasta are formă necirculară, se determină punctele cele mai solicitate (cel mai întins, respectiv cel mai comprimat). Pentru secțiuni circulare, nu este necesară determinarea punctelor mai solicitate.

♣ Pentru stabilirea punctelor mai solicitate, se procedează în felul următor (vezi şi Fig.1.1-4):

- În cele patru cadrane (delimitate de direcțiile principale Gz şi Gy), se pun semnele convenționale □ şi ○ (sau alte semne).
- Se analizează ce tensiuni (de întindere sau compresiune) produc în fiecare cadran momentele încovoietoare M_{iz}, respectiv M_{iy}. Pentru exemplul din Fig.1.1-4, rezultă:

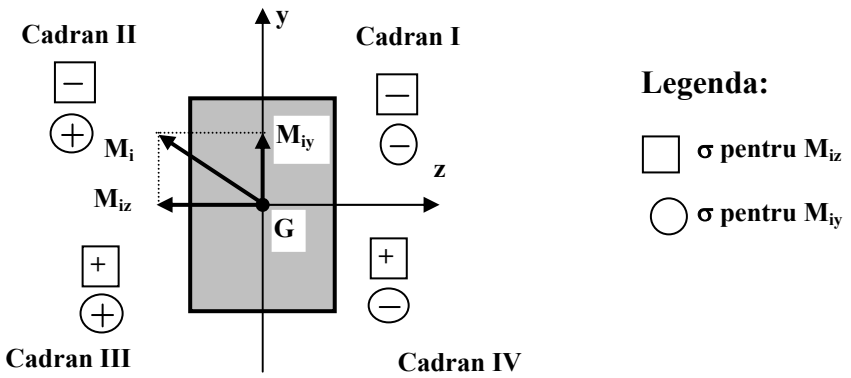


Fig.1.1-4

- momentul M_{iz} întinde partea de sub axa z (cadranele III şi IV) şi comprimă partea de deasupra axei z (cadranele I şi II). Ca urmare, în semnul convențional pătrat, corespunzător tensiunii σ pentru M_{iz} (vezi legenda), în cadranele III şi IV, punem +, iar în cele din cadranele I şi II, punem - ,
- momentul M_{iy} întinde fibrele din cadranele II şi III şi comprimă fibrele din cadranele I şi IV. Ca urmare, în cercurile din cadranele II şi III, punem +, iar în cercurile din cadranele I şi IV, punem semnul - .

Analizând acum Fig.1.1-4, se constată că punctul cel mai întins (punctul T), este situat în cadranul III (unde atât M_{iz} cât şi M_{iy} întind), iar cel mai comprimat (punctul C), este situat în cadranul I (unde atât M_{iz} cât şi M_{iy} comprimă).

- Se stabileşte tipul de problemă şi solicitarea. Pentru solicitarea de încovoiere oblică, pentru punctele cele mai solicitate (punctele T şi C) se scrie relația corespunzătoare tipului de problemă (relația din Tabelul 1.1-1).
- Din relația scrisă şi particularizată pentru problema dată, se determină mărimea necunoscută (tensiune maximă, dimensiunea secțiunii transversale sau încărcarea capabilă).

În general, pentru acest tip de probleme, se cere să se reprezinte şi variația tensiunii normale σ pe secțiune (de obicei în secțiunea periculoasă). Pentru aceasta, se parcurg **etapele** (evident după ce s-a efectuat calculul de rezistență):

- Fixăm primul cadran al sistemului de axe principale, adică orientăm axele Gz şi Gy. Primul cadran este acela care conține (include) momentul încovoietor rezultant, $M_{i,rez} \equiv M_i$ (vezi relația 1.1-8).
- Se scrie ecuația axei neutre (rel. 1.1-3a sau 1.1-3b)
- Se determină poziția axei neutre. Spre exemplu, se calculează unghiul β (rel. 1.1-6) făcut de axa neutră cu direcția principală Gz (vezi şi discuțiile de la rel. 1.1-7a...1.1-7c).
- Se duce axa neutră (Fig.1.1-5). Pentru situația din Fig.1.1-4, deoarece $I_z > I_y$, rezultă, $\beta > \alpha$.

- Se duc paralele la axa neutră prin punctele cele mai depărtate de aceasta. Punctele cele mai depărtate de axa neutră, trebuie să fie punctele cele mai solicitate (vezi Fig.1.1-4), deoarece punctele cele mai solicitate la încovoiere, sunt punctele cele mai depărtate de axa neutră.
- Se duce apoi o perpendiculară pe axa neutră şi se reprezintă variaţia tensiunii normale σ, care este o dreaptă (vezi Fig.1.1-5).
- Se pun semnele +, respectiv - în funcţie de zona întinsă sau comprimată şi se reprezintă şi valorile tensiunii σ în celelalte puncte (se duce "haşura" tensiunii).

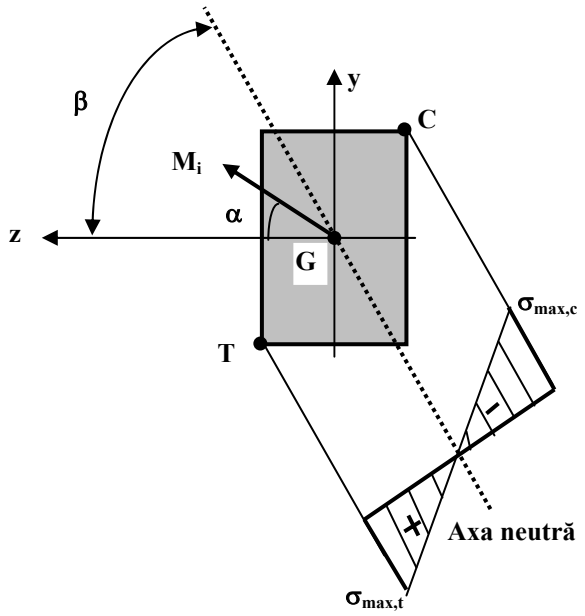


Fig.1.1-5

1.2 Modele de probleme rezolvate

1.2.1 *Fie bara cu forma şi încărcarea din Fig.1.2.1-1.*

a) Să se verifice bara, dacă: F = 8 KN, σ_{at} = 30 MPa, σ_{ac} = 140 MPa

b) Să se reprezinte variaţia tensiunii normale σ în secţiunea periculoasă.

Obs.: σ_{at} - este tensiunea normală admisibilă la întindere
σ_{ac} - este tensiunea normală admisibilă la compresiune.

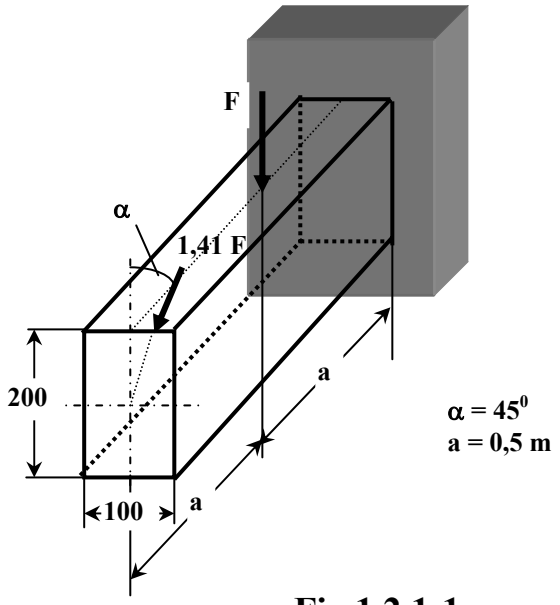


Fig.1.2.1-1

Rezolvare:

a) Se parcurg etapele de la paragraful 1.1, referitoare la calculul de rezistenţă:

- Se reprezintă bara numai prin axa sa geometrică (Fig.1.2.1-2)

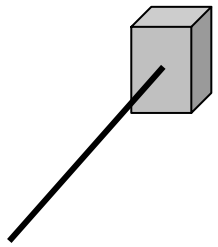


Fig.1.2.1-2

- Se reduc toate forţele în centrul de greutate G al secţiunii în care ele acţionează şi ce se obţine se pune pe bara reprezentată în Fig.1.2.1-2 (vezi Fig.1.2.1-3a). Forţa 1,41F se descompune în două componente (1,41 F·sin45^0 şi 1,41F·cos45^0) orientate după direcţiile principale de inerţie Gz, respectiv Gy (Fig.1.2.1-3b).
- Pentru sistemul din Fig.1.2.1-3b, se trasează diagramele de eforturi. Se renunţă la diagrama de efort tăietor T. Rezultă numai efort moment încovoietor.

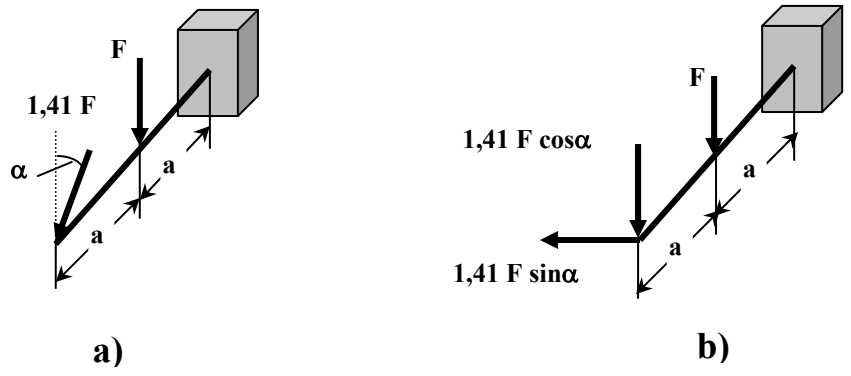


Fig.1.2.1-3

Diagrama de momente încovoietoare M_i, este prezentată în Fig.1.2.1-4.

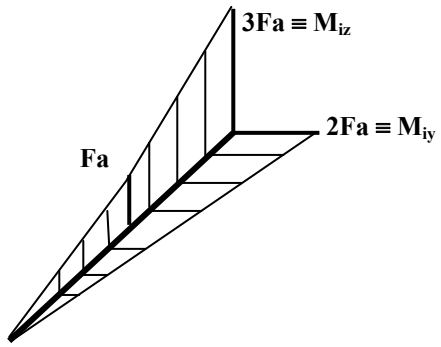


Fig.1.2.1-4

- Cum bara are secțiune constantă, rezultă că secțiunea periculoasă este în încastrare, unde momentul încovoietor este maxim.
- Se desenează secțiunea periculoasă (Fig.1.2.1-5).

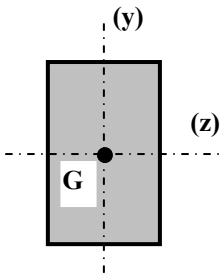


Fig.1.2.1-5

- Se stabilesc punctele cele mai solicitate din secțiunea

periculoasă, ținând seama de efectul celor două momente de încovoiere, M_{iz} = 3F·l şi M_{iy} = 2F·l, care acționează în secțiunea periculoasă (Fig.1.2.1-6) Pentru această etapă, vezi paragraful 1.1.

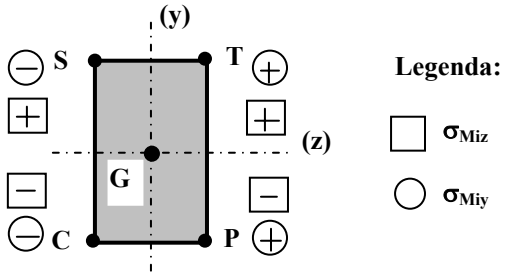


Fig.1.2.1-6

M_{iz} întinde partea de deasupra axei Gz şi comprimă partea de sub axa Gz, iar M_{iy}, întinde partea din dreapta axei Gy şi comprimă partea din stânga acestei axe.

Atenție: În Fig.1.2.1-4, diagramele de momente încovoietoare sunt reprezentate pe fibra întinsă (aşa după cum se ştie de la diagramele de eforturi).

Din Fig.1.2.1-6, rezultă că punctul cel mai întins (punctul T), este situat în cadranul trigonometric I, iar cel mai comprimat (punctul C), în cadranul trigonometric III.

- ♦ Problema studiată este de verificare, iar solicitarea este de încovoiere oblică.
- ♦ Se scrie relația generală de calcul pentru problema de verificare, secțiune necirculară, solicitarea de încovoiere oblică (vezi Tabelul 1.1-1):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z \qquad 1.2.1\text{-}1$$

Particularizată pentru punctele cele mai solicitate, rezultă:

$$\sigma_{max,t} = \sigma_T = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_T + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_T \qquad 1.2.1\text{-}2a$$

$$\sigma_{max,c} = \sigma_C = -\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_C - \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_C \qquad 1.2.1\text{-}2b$$

unde:

$\sigma_{max,t}$; $\sigma_{max,c}$ - tensiunea normală maximă la întindere, respectiv tensiunea normală maximă la compesiune.

Explicitând relațiile 1.2.1-2a şi 1.2.1-2b, se obține:

$$\sigma_{max,t} = \sigma_T = \frac{3Fa}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h}{2} + \frac{2Fa}{\frac{b^3h}{12}} \cdot \frac{b}{2} \qquad 1.2.1\text{-}3a$$

$$\sigma_{max,c} = \sigma_C = -\frac{3Fa}{\frac{bh^3}{12}} \cdot \frac{h}{2} - \frac{2Fa}{\frac{b^3h}{12}} \cdot \frac{b}{2} \qquad 1.2.1\text{-}3b$$

unde:

h = 200 mm; b = 100 mm; a = 0,5 m = 500 mm; F = 8 KN.

Cu aceste valori numerice, rezultă:

$$\sigma_{max,t} = \sigma_T = 42 \quad \text{MPa} > \sigma_{at} = 30 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{max,c} = |\sigma_C| = |-42| = 42 \quad \text{MPa} < |\sigma_{ac}| = 90 \text{ MPa}$$

Analizând rezultatele obținute, rezultă că bara satisface condiția de rezistență la compresiune, dar nu o satisface pe cea de întindere. Deci, condiția de rezistență, nu este satisfăcută pentru această bară.

Dacă dorim să calculăm tensiunea normală şi în alte puncte, atunci se utilizează relația 1.1-1. În relația 1.1-1, se pune + sau -, după cum aceste puncte se află în zona întinsă sau comprimată pentru fiecare din cele două momente încovoietoare. Spre exemplu, dacă se doreşte calculul tensiunii normale în punctul S, situat în cadranul trigonometric II (Fig.1.2.1-6), sau pentru punctul P din cadranul trigonometric IV (Fig.1.2.1-6), relația 1.1-1, se scrie astfel:

$$\sigma_S = +\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_S - \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_S \qquad 1.2.1\text{-}4a$$

$$\sigma_P = -\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_P + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_P \qquad 1.2.1\text{-}4b$$

b) Să reprezentăm acum variația tensiunii normale σ, în secțiunea periculoasă.

- ♦ Fixăm primul cadran, adică orientăm axele principale Gz şi Gy (Fig.1.2.1-7).
- ♦ Scriem ecuația axei neutre (relația 1.1-3b):

$$\frac{y}{z} = -\frac{M_{iy}}{M_{iz}} \cdot \frac{I_z}{I_y} \qquad 1.2.1\text{-}5$$

- ♦ Determinăm poziția axei neutre (unghiul β), cu relația 1.1-6:

$$|\beta| = \text{arctg}\left(\frac{I_z}{I_y} \cdot \text{tg}\alpha\right) = \text{arctg}\left(\frac{I_z}{I_y} \cdot \frac{M_{iy}}{M_{iz}}\right)$$

sau după înlocuirile valorilor numerice se obține:

$$|\beta| = 69{,}44^0$$

şi

$$\alpha = \text{arctg}\frac{M_{iy}}{M_{iz}} = \text{arctg}\frac{2}{3} = 33{,}69^0$$

Cum $I_z > I_y$, a rezultat $|\beta| > \alpha$ (ceea ce se ştia de la paragraful 1.1, relația 1.1-7a).

- ♦ Se duce axa neutră şi se reprezintă variația tensiunii normale (Fig.1.2.1-7).

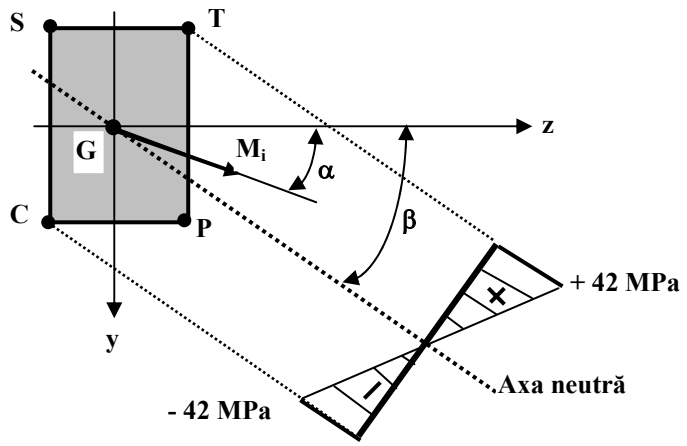


Fig.1.2.1-7

- La axa neutră ducem paralelele care să treacă prin punctele cele mai depărtate de acestea. Aceste paralele, după cum se observă, trec prin punctele T şi C, care sunt cele mai solicitate.
- Acum se reprezintă variaţia tensiunii normale σ pe secţiune.

Fiind vorba aici de secţiunea periculoasă, valorile maxime ale tensiunii normale, sunt:

$$\sigma_{max,t} = |\sigma_{max,c}| = 42 \text{ MPa}$$

1.2.2 *Pentru bara cu forma şi încărcarea din Fig.1.2.2-1, se cere:*

a) Forţa capabilă (F = ?), pentru σ_a = 150 MPa,

b) Diagrama de variaţie a tensiunii normale σ, în secţiunea periculoasă.

Se cunosc: t=10 mm, iar forţa de 1,73F este situată în planul secţiunii transversale şi face cu direcţia principală Gz un unghi de α =30^0, iar a= 0,5 m.

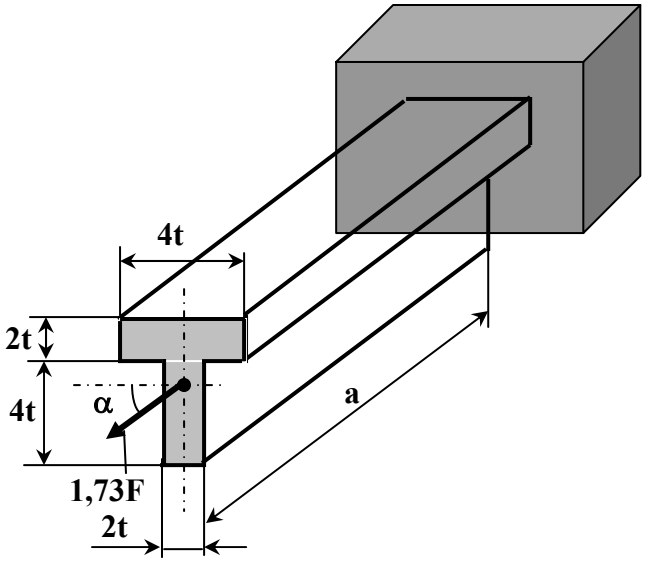


Fig.1.2.2-1

Rezolvare:

a) Se parcurg etapele cunoscute de la paragraful 1.1, respectiv, exemplul 1.2.1.

- Reprezentăm bara numai prin axa sa geometrică (Fig.1.2.2-2).

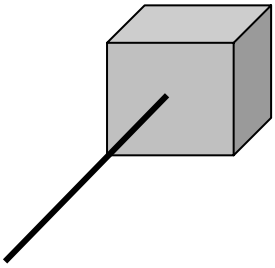


Fig.1.2.2-2

- Se reduce forța 1,73F în centrul de greutate al secțiunii în care ea acționează (capătul liber al barei). Din Fig.1.2.2-1, se constată că forța concentrată acționează chiar în centrul de greutate G al secțiunii, deci prin reducere se obține numai o forță concentrată egală cu 1,73F, care se pune pe bara repezentată în Fig.1.2.2-2, rezultând sistemul din Fig.1.2.2-3a. Forța concentrată 1,73F, se descompune după direcțiile principale de inerție Gz şi Gy, rezultând sistemul din Fig.1.2.2-3b.

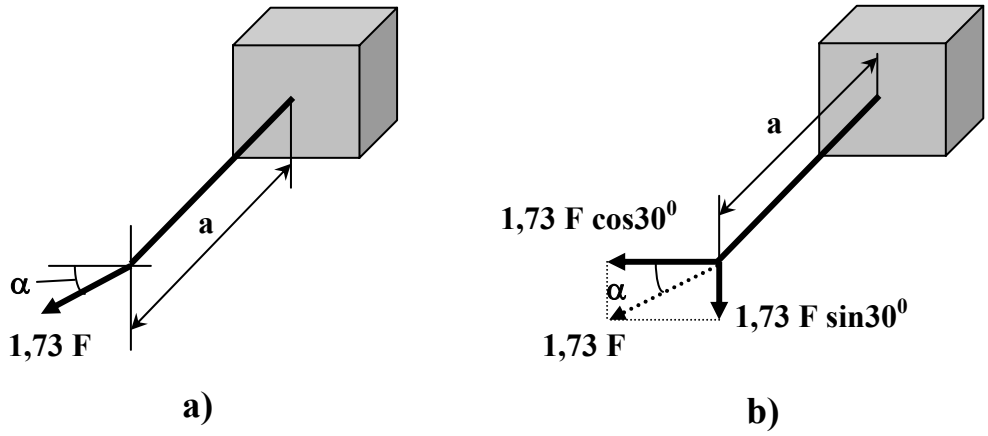


Fig.1.2.2-3

♦ Pentru sistemul din Fig.1.2.2-3b, se trasează diagramele de eforturi, în vederea stabilirii solicitării şi a secţiunii periculoase.

Deoarece, bara este cu secţiune transversală groasă, se poate renunţa (neglija) efectul efortului tăietor T. Pentru sistemul din Fig.1.2.2-3b, rezultă numai moment încovoietor în două plane. Diagramele M_i, sunt prezentate în Fig.1.2.2-4.

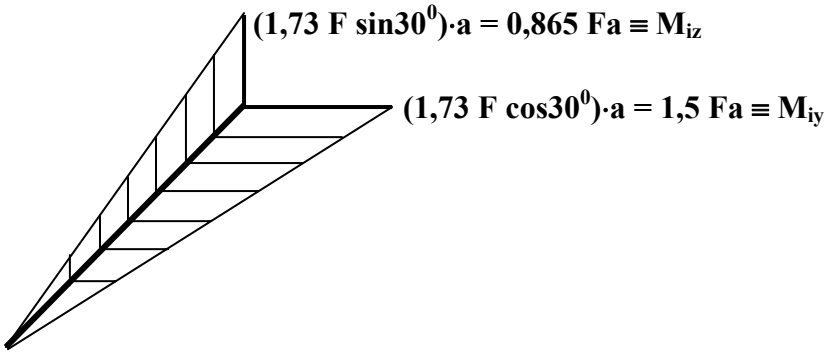


Fig.1.2.2-4

♦ Din Fig.1.2.2-4, rezultă că bara este solicitată la încovoiere oblică de către M_{iz} şi M_{iy}, iar secţiunea periculoasă, este în înţepenire.

♦ Desenăm secţiunea periculoasă (Fig.1.2.2-5). La această secţiune, pentru a cunoaşte poziţia direcţiilor principale Gz şi Gy, trebuie determinată poziţia centrului de

greutate G. Poziția centrului de greutate G, este prezentată în Fig.1.2.2-5 (y_G = 3,5 t).

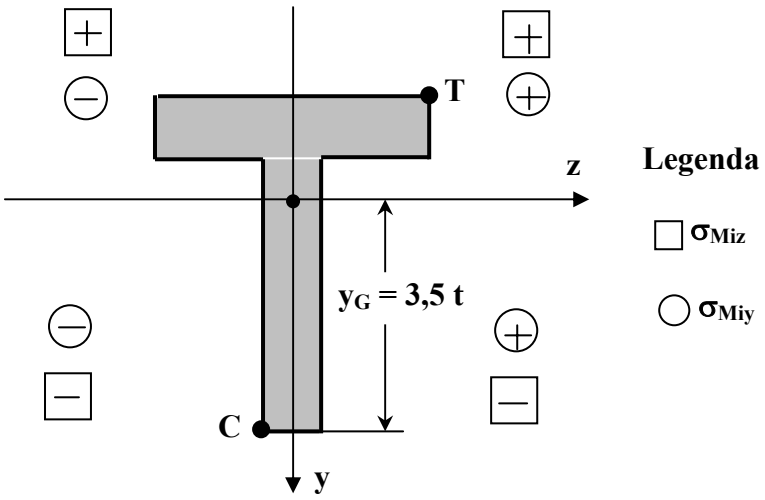


Fig.1.2.2-5

- Se stabilesc punctele cele mai solicitate din secțiunea periculoasă, punând în fiecare cadran trigonometric, câte un pătrat pentru tensiunea normală produsă de M_{iz} şi câte un cerc pentru tensiunea produsă de M_{iy} (Fig.1.2.2-5). Momentul M_{iz}, întinde partea de sus (cadranele I şi II) şi comprimă partea de jos (cadranele III şi IV), iar M_{iy}, întinde partea din dreapta (cadranele I şi IV) şi comprimă partea din stânga (cadranele II şi III). Această constatare s-a făcut pe baza diagramei de momente încovoietoare (Fig.1.2.2-4), diagrame care totdeauna se reprezintă pe fibra întinsă. Din Fig.1.2.2-5, rezultă că punctul cel mai întins (punctul T) se află în cadranul trigonometric I, iar cel mai comprimat (punctul C), în cadranul trigonometric III (Fig.1.2.2-5).
- Problema este de efort capabil (se cere F = ?), iar solicitarea este de încovoiere oblică (încovoiere în două plane).
- Relațiile de calcul pentru punctele cele mai solicitate (din Tabelul 1.1-1) sunt:

$$\sigma_{maxţ} = \sigma_T = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_T + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_T = \sigma_{at} \qquad 1.2.2\text{-}1a$$

$$\sigma_{maxç} = \sigma_C = -\frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_C - \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_C = \sigma_{ac} \qquad 1.2.2\text{-}1b$$

Pentru a putea efectua calculul tensiunilor normale, trebuie calculate momentele de inerţie axiale I_z, repectiv I_y.

Pentru secţiunea din Fig.1.2.2-5, cu valorile prezentate în Fig.1.2.2-1, rezultă:

$$I_z = 49{,}33 \cdot t^4 = 49{,}33 \cdot 10^4 \, mm^4$$
$$I_y = 13{,}33 \cdot t^4 = 13{,}33 \cdot 10^4 \, mm^4.$$

Particularizând relaţiile 1.2.2-1a şi 1.2.2-1b, rezultă:

$$\frac{0{,}866F \cdot 500}{49{,}33 \cdot 10^4} \cdot 2{,}5 \cdot 10 + \frac{1{,}5F \cdot 500}{13{,}33 \cdot 10^4} \cdot 2 \cdot 10 = 150 \qquad 1.2.2\text{-}2a$$

$$-\frac{0{,}866F \cdot 500}{49{,}33 \cdot 10^4} \cdot 3{,}5 \cdot 10 - \frac{1{,}5F \cdot 500}{13{,}33 \cdot 10^4} \cdot 1 \cdot 10 = -150 \qquad 1.2.2\text{-}2b$$

Din relaţia 1.2.2-2a, rezultă F_1 = 1116,07 N = 1,116 KN, iar din relaţia 1.2.2-2b, rezultă F_2 = 1724,93 N = 1,724 KN.

Forţa capabilă pentru bara studiată, este:

$$F_{cap} = \min(F_1; F_2) = 1{,}116 \text{ KN}.$$

b) Pentru trasarea diagramei de variaţie a tensiunii normale σ pe secţiune, se parcurg etapele:

Fixăm primul cadran (vezi Fig.1.2.2-5), adică se orientează direcţiile principale Gz şi Gy.

Atenţie: Primul cadran format de direcţiile principale (a nu se confunda cu primul cadran trigonometric), este cadranul în care acţionează momentul încovoietor $M_i \equiv M_{i,rez}$, dat de M_{iz} şi M_{iy} şi nu cadranul în care este forţa F. Pentru exemplul nostru, forţa 1,73F

acționează în cadranul trigonometric III (sau I), iar momentul $M_{i,rez}$, în cadranul trigonometric IV. Aşadar, primul cadran al axelor principale de inerție Gz şi Gy, este cadranul trigonometric IV.

- Se scrie acum, ecuația axei neutre (rel. 1.1-3b):

$$\frac{y}{z} = -\frac{M_{iy}}{M_{iz}} \cdot \frac{I_z}{I_y} \qquad 1.2.2\text{-}3$$

- Determinăm poziția axei neutre (rel. 1.1-6):

$$\beta = \text{arctg}\left| -\frac{M_{iy}}{M_{iz}} \cdot \frac{I_z}{I_y} \right| = 81{,}13^0 \qquad 1.2.2\text{-}4$$

- Se duce axa neutră (Fig.1.2.2-6).
- Se duc paralele la axa neutră prin punctele cele mai depărtate şi se se constată că aceste paralele trec prin punctele T şi C, stabilite ca fiind cele mai solicitate, ceea ce este corect.
- Se reprezintă variația tensiunii normale σ pe secțiune (Fig.1.2.2-6).
- Cum $F_{cap} = F_1$, obținută din condiția $\sigma_{max,t} = \sigma_T = 150$ MPa (rel. 1.2.2-2a), rezultă că în punctul C (cel mai comprimat), tensiunea σ, trebuie calculată pentru valoarea lui $F = F_{cap}$.

Pentru aceasta, utilizăm relația 1.2.2-2b, unde F = 1.116,07 N:

$$\sigma_C = -\frac{0{,}866 \cdot 1.116{,}07 \cdot 500}{49{,}33 \cdot 10^4} \cdot 35 - \frac{1{,}5 \cdot 1.116{,}07 \cdot 500}{13{,}33 \cdot 10^4} \cdot 10 = -96{,}98 \text{ MPa}$$

Această valoare este trecută în diagrama de variație a tensiunii normale σ pe secțiune (Fig.1.2.2-6).

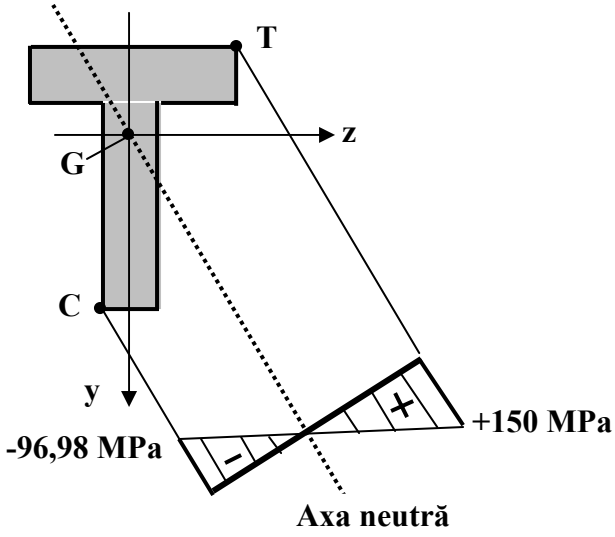


Fig.1.2.2-6

1.2.3 a) *Să se dimensioneze bara cu forma şi încărcarea din Fig.1.2.3-1 (d = ?), pentru* σ_a *= 150 MPa.*

b) *Să se reprezinte variaţia tensiunii normale* σ *în secţiunea periculoasă, fără a mai calcula valoarea maximă a acesteea.*

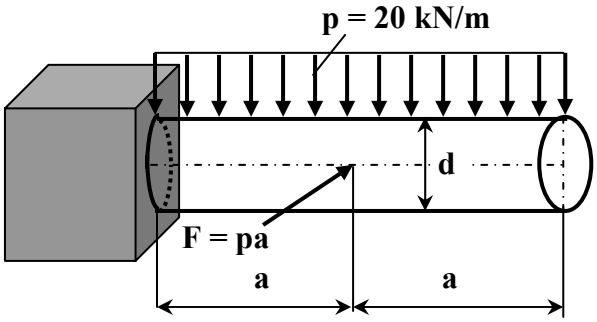


Fig.1.2.3-1

Rezolvare:

a) Se reprezintă bara prin axa sa geometrică (Fig.1.2.3-2).

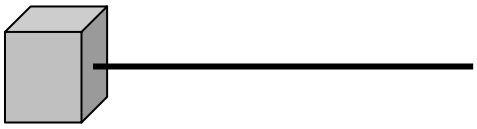


Fig.1.2.3-2

- Se reduc forțele (F şi p) în centrul de greutate al secțiunii în care acționează şi rezultantele lor se pun pe bara reprezentată în Fig.1.2.3-2 (Fig.1.2.3-3).

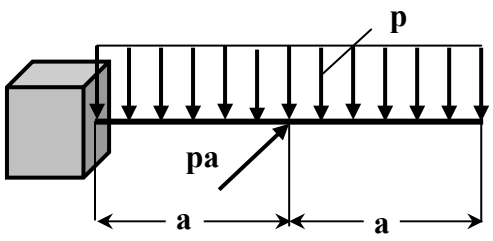


Fig.1.2.3-3

- Se trasează diagramele de eforturi (neglijăm efortul tăietor T). Diagramele M_i (moment încovoietor), sunt prezentate în Fig.1.2.3-4.

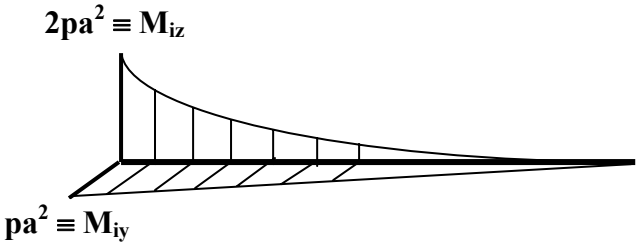


Fig.1.2.3-4

- Din Fig.1.2.3-4, rezultă că secțiunea periculoasă este în încastrare, iar solicitarea este de încovoiere oblică, cu momentele $M_{iz} = 2pl^2$ şi $M_{iy} = pl^2$.
- Secțiunea periculoasă, este prezentată în Fig.1.2.3-5.
- Fiind secțiune circulară, nu mai stabilim punctele cele mai solicitate, lucru care presupune pentru acest tip de secțiune, determinarea mai întâi a poziției axei neutre.
- Problema este de dimensionare, solicitare de încovoiere oblică.

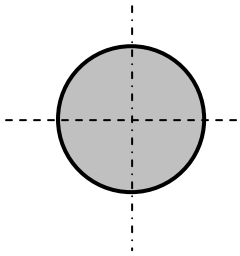


Fig.1.2.3-5

♦ Din Tabelul 1.1-1, relația de calcul, este:

$$W_{z,nec} = \frac{M_{i,rez}}{\sigma_a} = \ldots \qquad 1.2.3\text{-}1a$$

♦ Particularizând relația 1.2.3-1a, pentru problema în studiu, rezultă:

$$\frac{\sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2}}{\sigma_a} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \qquad 1.2.3\text{-}1b$$

de unde se obține:

$$d = \left[\sqrt{\frac{32 \cdot \sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2}}{\pi \cdot \sigma_a}}\right]^{1/3} = \left[\sqrt{\frac{22{,}77 \cdot p \cdot a^2}{\sigma_a}}\right]^{1/3}$$

Cu valorile numerice, se obține:

$$d = 200 \text{ mm}.$$

b) Poziția axei neutre, pentru secțiuni circulare, coincide cu poziția momentului încovoietor rezultant (rel. 1.1.7c):

$$|\beta| = \alpha$$

$$\beta = \text{arctg}\,\frac{M_{iy}}{M_{iz}} = \text{arctg}\,\frac{p \cdot a^2}{2 \cdot p \cdot a^2} = \text{arctg}\,\frac{1}{2} = 26{,}56^0$$

♦ Primul cadran este prezentat în Fig.1.2.3-6.

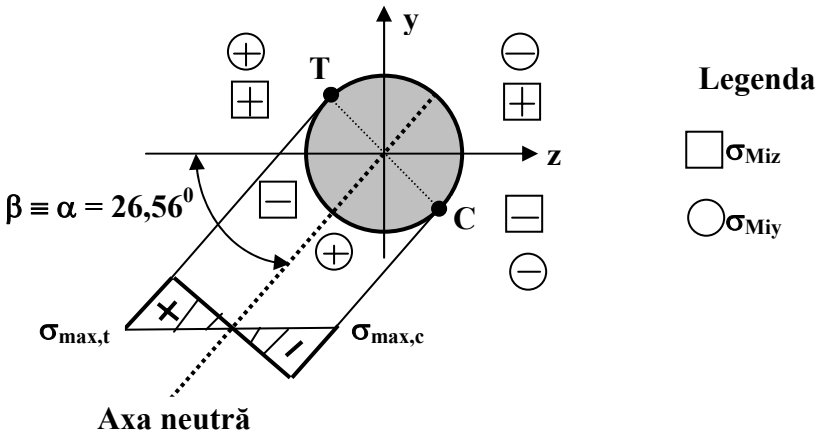


Fig.1.2.3-6

O analiză a punctelor mai solicitate, scoate în evidență faptul că punctul cel mai întins este situat în cadranul trigonometric II, iar cel mai comprimat, în cadranul trigonometric IV. La fel a rezultat şi în urma reprezentării grafice a variației tensiunii pe secțiune.

2. CALCULUL DE REZISTENŢĂ LA SOLICITĂRI COMPUSE

2.1 Consideraţii generale. Tipuri de solicitări compuse

Dacă în secţiunea unui element de rezistenţă, există mai multe eforturi, spunem că în acea secţiune, se realizează o **solicitare compusă.** Solicitarea compusă a elementelor de rezistenţă, este solicitarea cea mai întâlnită în practică. Sunt puţine cazurile în care elementele de rezistenţă sunt simplu solicitate, adică supuse acţiunii unui singur efort. Dacă eforturile care acţionează într-o secţiune, produc toate acelaşi tip de tensiune (normală σ sau tangenţială τ), se spune că solicitarea respectivă este o **solicitare compusă de categoria I**. Ca exemplu de astfel de solicitare, se aminteşte: solicitarea axială + încovoierea oblică; forfecarea + torsiunea.

Dacă eforturile care acţionează într-o secţiune a elementului de rezistenţă, produc tensiuni de natură diferită (normală σ şi tangenţială τ), se spune că solicitarea respectivă, este o **solicitare compusă de categoria a II-a**. Spre exemplu, o astfel de solicitare este caracteristică arborilor, în secţiunile lor transversale întâlnindu-se efeorturile: M_{iz}, M_{iy}, M_t.

Calculul de rezistenţă pentru cele două tipuri de solicitări compuse (categoria I şi categoria a II-a), este diferit.

În această lucrare, cele două categorii de solicitări compuse, se tratează separat.

2.2 Solicitarea compusă de categoria I

2.2.1 *Consideraţii generale. Etape de calcul*

După cum s-a mai spus, în cazul solicitării compuse de categoria I, eforturile care acţionează în secţiunea transversală a unui element de rezistenţă, produc tensiuni de acelaşi tip.

Fiind vorba despre tensiuni de acelaşi tip (natură), tensiunea rezultantă într-un punct dintr-o astfel de secțiune, se obține ca o sumă vectorială a tensiunilor produse de fiecare efort în parte.

Astfel:

- pentru cazul existenței eforturilor N, M_{iz}, M_{iy}, tensiunea normală rezultantă într-un punct K ($\sigma_{rez,K}$), este:

$$\sigma_{rez,K} = \pm\sigma_N \pm \sigma_{Miz} \pm \sigma_{Miy} = \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_K \pm \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_K \qquad 2.2.1\text{-}1$$

unde:

σ_N - tensiunea normală în punctul K, produsă de efortul axial N

σ_{Miz} - tensiunea normală în punctul K, produsă de momentul încovoietor M_{iz}

σ_{Miy}- tensiunea normală în punctul K, produsă de momentul încovoietor M_{iy}.

Pentru bare de secțiune circulară, când se calculează tensiunea normală rezultantă maximă, se utilizează relația:

$$\sigma_{rez,max} = +\frac{N}{A} + \frac{M_{i,rez}}{W_z} \qquad 2.2.1\text{-}2$$

unde:

$$M_{i,rez} = \sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2} \qquad 2.2.1\text{-}3$$

Din relația 2.2.1-1, se constată că tensiunea rezultantă $\sigma_{rez,K}$, este o suma algebrică şi asta datorită faptului că tensiunile normale produse de eforturile N, M_{iz}, M_{iy} (σ_N, σ_{Miz}, σ_{Miy}) sunt toate normale (perpendiculare) la secțiune, caz în care suma vectorială se reduce la o sumă algebrică.

- pentru cazul existenței eforturilor T_y, T_z, M_t, tensiunea tangențială rezultantă într-un punct K ($\tau_{rez,K}$), este:

$$\vec{\tau}_{rez,K} = \vec{\tau}_{Ty} + \vec{\tau}_{Tz} + \vec{\tau}_{Mt} \qquad 2.2.1\text{-}4$$

unde:

$\vec{\tau}_{Ty}$ - tensiunea tangențială în punctul K, produsă de efortul tăietor T_y

$\vec{\tau}_{Tz}$ - tensiunea tangențială în punctul K, produsă de efortul tăietor T_z

$\vec{\tau}_{Mt}$ - tensiunea tangențială în punctul K, produsă de momentul de torsiune M_t

În cazul solicitării compuse de categoria I de forfecare şi torsiune, la elementele de rezistență a căror arie a secțiunii transversale are valoare mare, efortul tăietor se poate neglija. În acest caz, rezultă numai o solicitare simplă de torsiune.

Calculul elementelor de rezistență supuse solicitărilor compuse, se face în general numai din condiția de rezistență.

În cazul solicitării compuse (cu eforturile N, M_{iz}, M_{iy}), pentru cele trei tipuri de problemă (verificare, dimensionare, efort capabil), condiția de rezistență, relațiile de calcul sunt prezentate în Tabelul 2.2.1-1.

Tabelul 2.2.1-1

Tipul problemei	**Condiția de rezistență**	
	Secțiune necirculară	**Secțiune circulară**
De verificare	$\sigma_{max} = N/A + (M_{iz}/I_z)\cdot y_{max} + (M_{iy}/I_y)\cdot z_{max} < \sigma_a$	$\sigma_{max} = N/A + M_{irez} / W_z < \sigma_a$
De dimensionare	$N/A + (M_{iz}/I_z)\cdot y_{max} + (M_{iy}/I_y)\cdot z_{max} = \sigma_a$	$N/A + M_{irez} / W_z = \sigma_a$
De efort capabil	$N/A + (M_{iz}/I_z)\cdot y_{max} + (M_{iy}/I_y)\cdot z_{max} = \sigma_a$	$N/A + M_{irez} / W_z = \sigma_a$

Relațiile de calcul prezentate în Tabelul 2.2.1-1, se scriu pentru punctele cele mai solicitate, situate în secțiunea periculoasă. Aceste puncte trebuie determinate, cu excepția secțiunilor circulare.

Pentru calculul de rezistență, solicitarea compusă de categoria I, se parcurg următoarele **etape** (vezi şi etapele de la încovoierea oblică, Cap. 1):

- Se reprezintă elementul de rezistență numai prin axa sa geometrică.
- Se reduc toate forțele exterioare în centrul de greutate al secțiunii în care ele acționează şi ce se obține se pune pe elementul de rezistență reprezentat numai prin axa sa geometrică.
- Se trasează diagramele de eforturi (fără efortul tăietor T) pentru sistemul obținut anterior. Vor rezulta eforturile: N, M_{iz}, M_{iy} (aici s-a presupus că eforturile care rezultă conduc la o solicitare compusă de categoria I).
- Se stabileşte secțiunea periculoasă şi eforturile din această secțiune.
- Se stabileşte tipul problemei.
- Pentru punctele cele mai solicitate, în funcție de tipul problemei, din Tabelul 2.2.1-1, se scrie relația de calcul.
- Din relațiile scrise anterior, se determină mărimea necunoscută.

Pentru acest tip de solicitare, se cere de cele mai multe ori şi reprezentarea tensiunii normale pe secțiune.

Pentru aceasta, se parcurg următoarele **etape**:

- Se fixează primul cadran al sistemulul de axe principale, adică se orientează axele principale Gz şi Gy. De data aceasta, primul cadran este acela în care tensiunile normale produse de cele trei eforturi, sunt toate fie pozitive, fie negative.
- Se scrie ecuația axei neutre:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_0 + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_0 = 0 \qquad 2.2.1\text{-}5$$

care, după cum se observă, este o dreaptă care nu trece prin centrul de greutate. În relația 2.2.1-5, y_0 şi z_0, sunt coordonatele punctelor de pe axa neutră.

- Pentru a reprezenta axa neutră, se determină punctele de intersecție ale acesteea cu direcțiile principale Gz, respectiv Gy:
- Dacă impunem $y_0 = 0$, se obține intersecția axei neutre cu axa Gz în punctul P de coordonate:

$$y_0 = 0$$
$$z_0 = -\frac{N}{M_{iy}} \cdot \frac{I_y}{A} \qquad 2.2.1\text{-}6$$

- Dacă impunem $z_0 = 0$, se obține intersecția axei neutre cu axa Gy în punctul S de coordonate:

$$z_0 = 0$$
$$y_0 = -\frac{N}{M_{iz}} \cdot \frac{I_z}{A} \qquad 2.2.1\text{-}7$$

- Prin punctele P şi S, se duce axa neutră (o dreaptă).
- Se duc paralele la axa neutră prin punctele cele mai depărtate de aceasta. Punctele cele mai depărtate de axa neutră, trebuie să fie punctele cele mai solicitate (punctele T şi C).
- Se duce apoi o perpendiculară pe axa neutră şi se reprezintă variația tensiunii normale σ, care este tot o dreaptă.
- Se pun semnele +, respectiv - în funcție de zona întinsă sau comprimată şi se reprezintă valorile tensiunii normale şi în celelalte puncte (se duce "haşura" tensiunii).

Observație:

✓ Dacă unul din cele două momente încovoietoare lipseşte, axa neutră este paralelă cu una din direcțiile principale. Astfel:

➢ dacă $M_{iy} = 0$, rezultă poziția axei neutre:

$$y_0 = -\frac{N}{M_{iz}} \cdot \frac{I_z}{A}$$

şi axa neutră este paralelă cu axa principală Gz,

➢ dacă $M_{iz} = 0$, poziția axei neutre, este:

$$z_0 = -\frac{N}{M_{iy}} \cdot \frac{I_y}{A}$$

iar, axa neutră este paralelă cu axa principală Gy,

- dacă N = 0, rezultă o solicitare de încovoiere oblică (vezi Cap.1).

- După cum rezultă din relațiile 2.2.1-6 şi 2.2.1-7, axa neutră taie axele principale Gz şi Gy pe sensurile lor negative, motiv pentru care la poziționarea axei neutre pe secțiune, este foarte important să se ştie care sunt sensurile pozitive ale axelor principale Gz şi Gy (adică să se cunoască sau să se definească un prim cadran).

2.2.2 *Modele de probleme rezolvate*

2.2.2.1 *Pentru bara din Fig.2.2.2.1-1, se cere*:

a) *Valoarea forței F, pentru* σ *= 150 MPa*

b) *Diagrama tensiunii normale* σ, *în secțiunea periculoasă*.

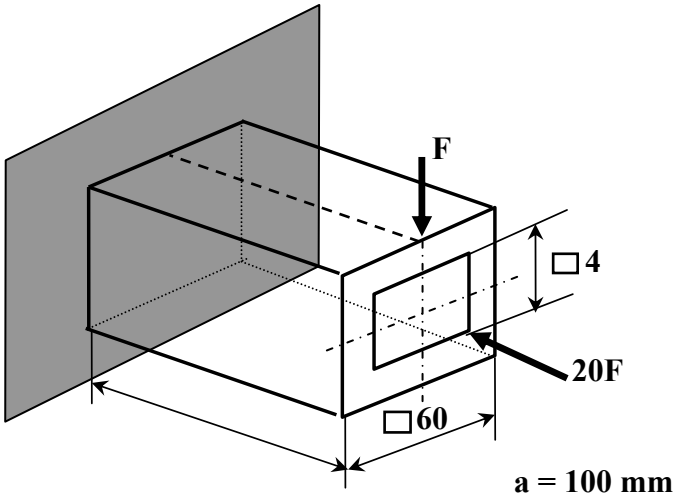


Fig.2.2.2.1-1

Rezolvare:

a) Pentru calculul forței capabile F, se parcurg etapele prezentate la paragraful 2.2.1:

- Se reprezintă bara numai prin axa sa geometrică (Fig.2.2.2.1-2).

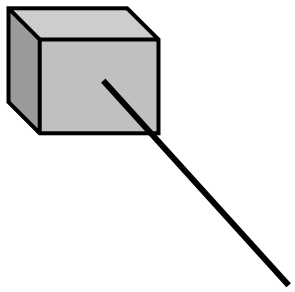


Fig.2.2.2.1-2

- Se reduc forțele aplicate (F şi 20F) în centrul de greutate al secțiunilor în care ele acționează şi ce se obține se aşează pe bara reprezentată numai prin axa sa geometrică (Fig.2.2.2.1-3).

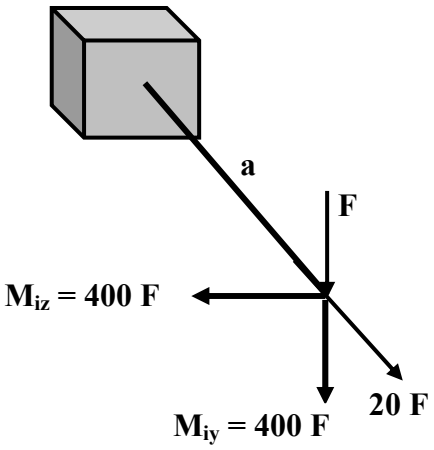


Fig.2.2.2.1-3

- Pentru sistemul din Fig.2.2.2.1-3, se trasează diagramele de eforturi (fără efortul tăietor), obținându-se diagramele din Fig.2.2.2.1-4.
- Analizând acum diagramele de eforturi din Fig.2.2.2.1-4a...c, rezultă că secțiunea periculoasă este în capătul liber al barei, unde acționează eforturile:

$$N = 20\ F \rightarrow \sigma_N$$
$$M_{iz} = 400\ F \rightarrow \sigma_{Miz}$$
$$M_{iy} = 400\ F \rightarrow \sigma_{Miy}$$

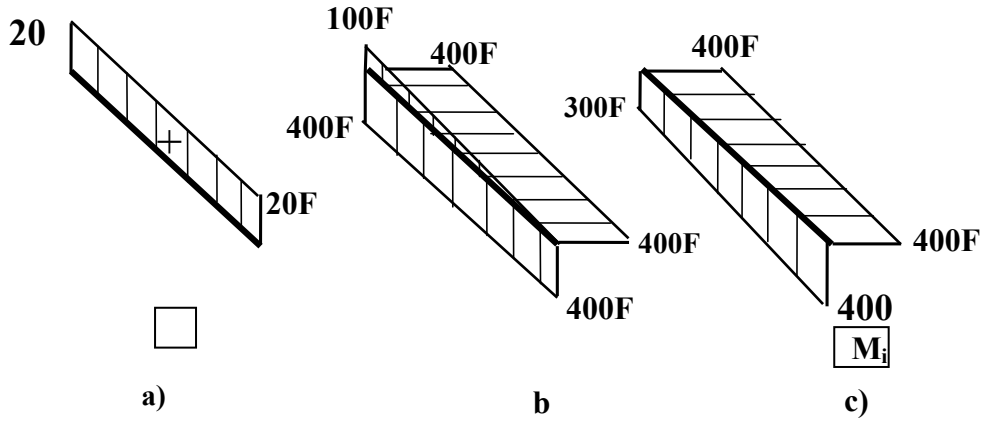


Fig.2.2.2.1-4

- Secțiunea periculoasă este prezentată în Fig.2.2.2.1-5.
- Tot în Fig.2.2.2.1-5, se prezintă modul de determinare a punctelor mai periculoase din această secțiune (vezi Cap.1). Rezultă că punctul cel mai întins este punctul T (situat în cadranul trigonometric IV), iar cel mai comprimat este punctul C (situat în cadranul trigonometric II). Dintre cele două puncte, deoarece secțiunea este dublu simetrică, rezultă că punctul T este cel mai solicitat (în acest punct, toate eforturile produc tensiuni normale de întindere).

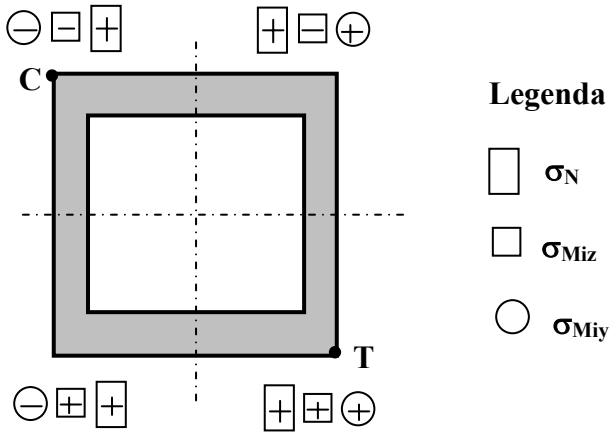


Fig.2.2.2.1-5

- Problema este de efort capabil, solicitare compusă de categoria I, secțiune necirculară.

- Relaţia de calcul (din Tabelul 2.2.1-1), este:

$$\pm\frac{N}{A}\pm\frac{M_{iz}}{I_z}\cdot y_K\pm\frac{M_{iy}}{I_y}\cdot z_K=\sigma_a \qquad 2.2.2.1\text{-}1$$

sau, particularizată pentru punctul T, rezultă:

$$\pm\frac{N}{A}\pm\frac{M_{iz}}{I_z}\cdot y_T\pm\frac{M_{iy}}{I_y}\cdot z_T=\sigma_a \qquad 2.2.2.1\text{-}2$$

sau după înlocuirea valorilor eforturilor:

$$+\frac{20F}{A}+\frac{400F}{I_z}\cdot 30+\frac{400F}{I_y}\cdot 30=150 \qquad 2.2.2.1\text{-}3$$

unde:

$A = 60 \cdot 60 - 40 \cdot 40 = 2.000\ mm^2$
$I_z = I_y = 86,66 \cdot 10^4\ mm^4$.

Înlocuind pe A, I_z, I_y în relaţia 2.2.2.1-3, se obţine:

$$+\frac{20F}{2.000}+\frac{400F}{86,66\cdot 10^4}\cdot 30+\frac{400F}{86,66\cdot 10^4}\cdot 30=150 \qquad 2.2.2.1\text{-}4$$

de unde, rezultă valoarea forţei capabile (valoarea maximă admisă pentru forţa F):

$$F = 3,973\ KN \qquad 2.2.2.1\text{-}5$$

b) Pentru reprezentarea variaţiei tensiunii normale în secţiunea periculoasă, se procedează astfel:

- Se stabileşte primul cadran (vezi Fig.2.2.2.1-5). Primul cadran este prezentat în Fig.2.2.2.1-6.
- Se determină punctele de intersecţie ale axei neutre cu axele principale Gz şi Gy (vezi rel. 2.2.1-6 şi 2.2.1-7):
  - intersecţia cu axa Gz (punctul P):

$$y_0 = 0$$

$$z_0 = -\frac{N}{M_{iy}} \cdot \frac{I_y}{A} = -21{,}66 \ \text{MPa}$$

➢ intersecția cu axa Gy (punctul S):

$$z_0 = 0$$

$$y_0 = -\frac{N}{M_{iz}} \cdot \frac{I_z}{A} = -21{,}66 \ \text{MPa}$$

Poziția axei neutre, este prezentată în Fig.2.2.2.1-6.

♦ Se duc paralele la axa neutră prin punctele cele mai depărtate de aceasta. Aceste paralele, după cum se poate constata, trec prin punctele cele mai solicitate (punctele T şi C).

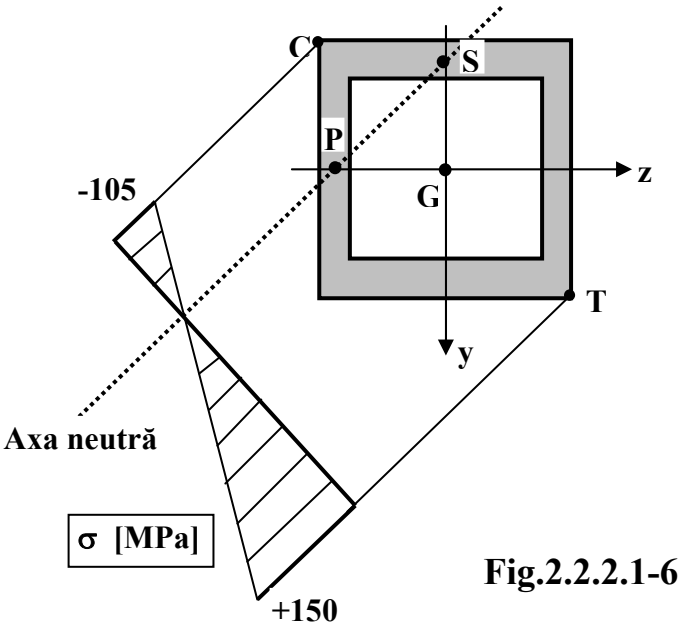


Fig.2.2.2.1-6

♦ Se reprezintă variația tensiunii normale σ pe secțiune (Fig.2.2.2.1-6).

♦ Trebuie calculată acum, tensiunea normală din punctul C, la valoarea forței admisibile, F = 3,973 KN:

$$\sigma_C = +\frac{20F}{2.000} - \frac{400F}{86,66 \cdot 10^4} \cdot 30 - \frac{400F}{86,66 \cdot 10^4} \cdot 30 = -105 \text{ MPa}$$

Această valoare a tensiunii normale din punctul C, la valoarea forţei admise, este trecută în diagrama din Fig.2.2.2.1-6.

2.2.2.2 *Pentru grinda în consolă din Fig.2.2.2.2-1, se cere*:

a) *Tensiunile normale maxime şi minime (maxime la întindere şi compresiune)*,

b) *Variaţia tensiunii normale în secţiunea periculoasă*,

c) *Tensiunea normală în dreptul centrului de greutate G al secţiunii transversale a grinzii*.

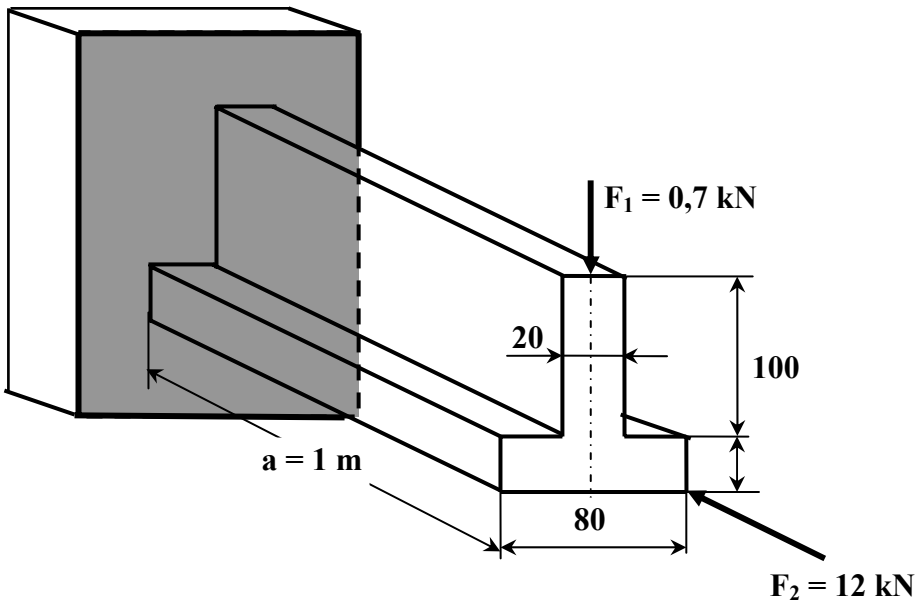


Fig.2.2.2.2-1

Rezolvare:

Se vor parcurge etapele deja cunoscute (vezi paragraful 2.2.1 şi exemplul precedent).

- Se reprezintă grinda numai prin axa sa geometrică (Fig.2.2.2.2-2).

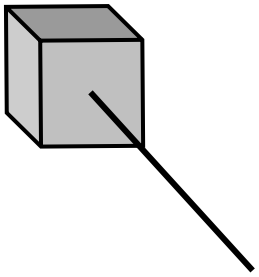


Fig.2.2.2.2-2

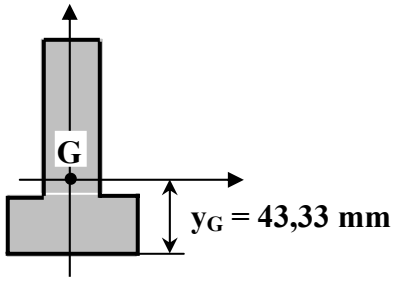


Fig.2.2.2.2-3

- Se reduc toate forțele aplicate în centrul de greutate al secțiunii în care ele acționează. Pentru aceasta, trebuie determinată poziția centrului de greutate al secțiunii transversale (vezi calculul poziției centrului de greutate al unei suprafețe plane).

Poziția centrului de greutate G, al secțiunii transversale pentru bara noastră, este prezentată în Fig.2.2.2.2-3.

- Componentele obținute prin reducerea forțelor aplicate, în centrul de greutate al secțiunii, se pun pe grinda reprezentată numai prin axa sa geometrică, rezultând sistemul din Fig.2.2.2.2-4.

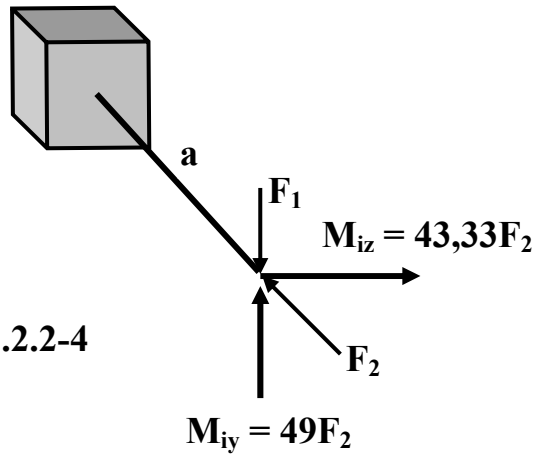


Fig.2.2.2.2-4

- Cu încărcările din Fig.2.2.2.2-4, se trasează diagramele de eforturi (se neglijează efortul tăietor). Pentru cazul studiat diagramele de eforturi rezultate sunt prezentate în Fig.2.2.2.2-5.

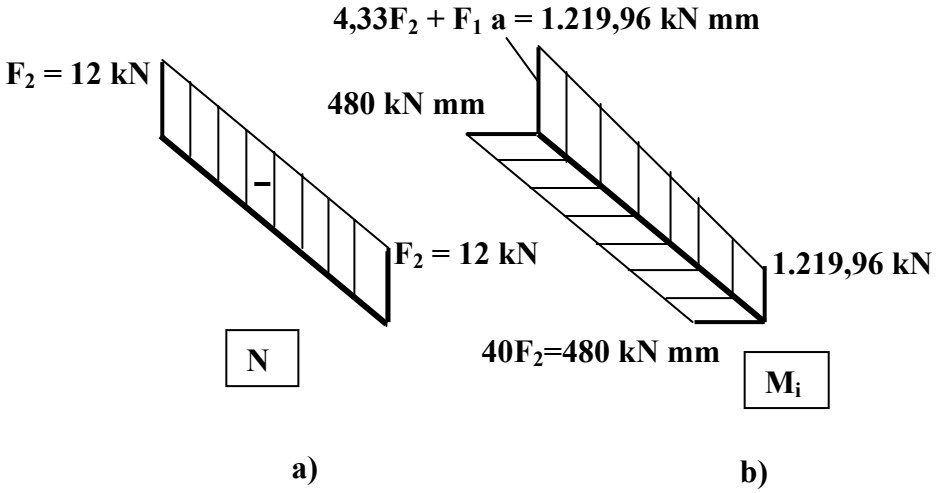


Fig.2.2.2.2-5

- Din analiza diagramelor de eforturi şi ale variaţiei secţiunii în lungul barei, rezultă că secţiunea periculoasă, este în încastrare.
- Eforturile din secţiunea periculoasă, sunt:

$$N = - F_2 = - 12 \text{ KN}$$
$$M_{iz} = 1.219{,}96 \text{ KN·mm}$$
$$M_{iy} = 480 \text{ KN·mm}$$

Rezultă că în secţiunea periculoasă, există o solicitare compusă de categoria I, secţiunea fiind necirculară.

- Forma secţiunii periculoase, este prezentată în Fig.2.2.2.2-6.
- Stabilirea şi poziţionarea punctelor mai solicitate din secţiunea periculoasă, este prezentată în Fig.2.2.2.2-6. Punctul cel mai întins (punctul T), este situat în cadranul trigonometric II, iar cel mai comprimat (punctul C), în cadranul trigonometric IV. Tot acum se poate preciza şi primul cadran, care aici coincide cu cadranul trigonometric IV (vezi Fig.2.2.2.2-6), unde toate tensiunile sunt de compresiune (negative).

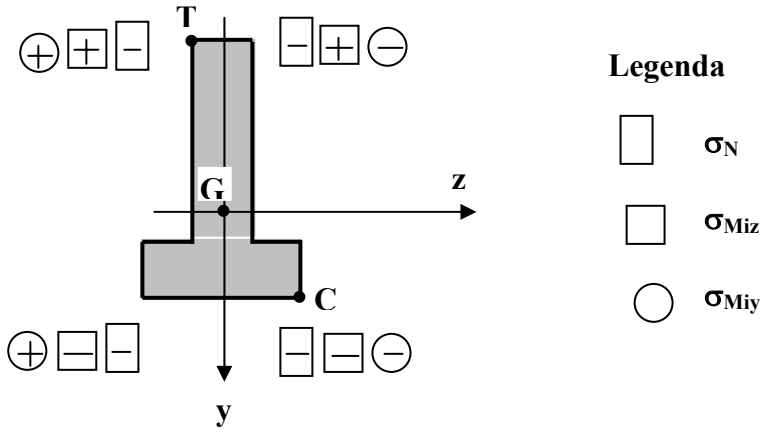


Fig.2.2.2.2-6

- Problema este de verificare, condiția de rezistență, secțiune necirculară.
- Relațiile de calcul (din Tabelul 2.2.1-1), pentru punctele cele mai solicitate, sunt:

$$\sigma_{max,t} = \sigma_T = -\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_T + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_T \qquad 2.2.2.2\text{-}1$$

$$\sigma_{max,c} = \sigma_C = -\frac{N}{A} - \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_C - \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_C \qquad 2.2.2.2\text{-}2$$

Pentru secțiunea periculoasă, rezultă:

$A = 3.600\ mm^2$ $\qquad y_T = 76{,}67$ mm, $z_T = 10$ mm
$I_z = 491{,}683 \cdot 10^4\ mm^4$ $\qquad y_C = 43{,}33$ mm, $z_C = 40$ mm
$I_y = 92 \cdot 10^4\ mm^4$

Cu aceste valori şi cu cele ale eforturilor din secțiunea periculoasă, din relațiile 2.2.2.2-1 şi 2.2.2.2-2, se obține:

$\sigma_{max,t} = \sigma_T = 27{,}6$ MPa
$\sigma_{max,c} = \sigma_C = -35$ MPa

Se poate constata, că tensiunile maxime la tracțiune ($\sigma_{max,t}$), respectiv la compresiune ($\sigma_{max,c}$), sunt inferioare celor admisibile pentru oțel.

b) Pentru a reprezenta variația tensiunii normale pe secțiunea periculoasă, trebuie stabilită poziția axei neutre.

♦ Ecuația axei neutre, este (relația 2.2.1-5):

$$\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_0 + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_0 = 0$$

de unde rezultă tăieturile axei neutre cu axele principale Gz şi Gy:

➢ intersecția cu axa Gz (punctul P):

$$y_0 = 0$$

$$z_0 = -\frac{N}{M_{iy}} \cdot \frac{I_y}{A} = -6{,}4 \quad \text{MPa}$$

➢ intersecția cu axa Gy (punctul S):

$$z_0 = 0$$

$$y_0 = -\frac{N}{M_{iz}} \cdot \frac{I_z}{A} = -13{,}4 \quad \text{MPa}$$

Poziția axei neutre, precum şi variația tensiunii normale σ, în secțiunea periculoasă, este prezentată în Fig.2.2.2.2-7.

c) Pentru centrul de greutate G, relația de calcul a tensiunii normale σ, este:

$$\sigma_{max,G} = -\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_G + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_G$$

unde:

$y_G = z_G = 0$,

iar relația 2.2.2.2-3, capătă forma:

$$\sigma_{max,G} = -\frac{N}{A} = -\frac{F_2}{A} = -\frac{12.000}{3.600} = -3,34 \quad \text{MPa}$$

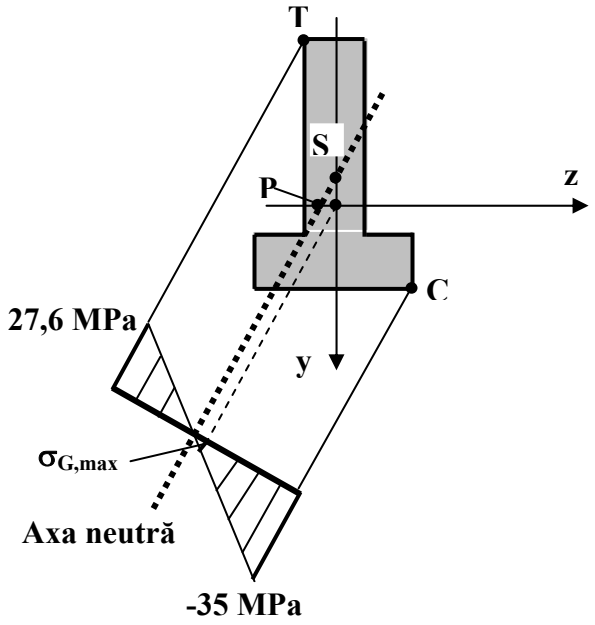


Fig.2.2.2.2-7

Tensiunea $\sigma_{max,G}$, este de asemenea prezentată în Fig.2.2.2.2-7.

2.2.2.3 *Pentru bara de secțiune circulară din Fig.2.2.2.3-1, se cere*:

a) *dimensionarea barei (d = ?) pentru* σ_a *= 150 MPa*

b) *diagrama de variație a tensiunii normale în secțiunea periculoasă*.

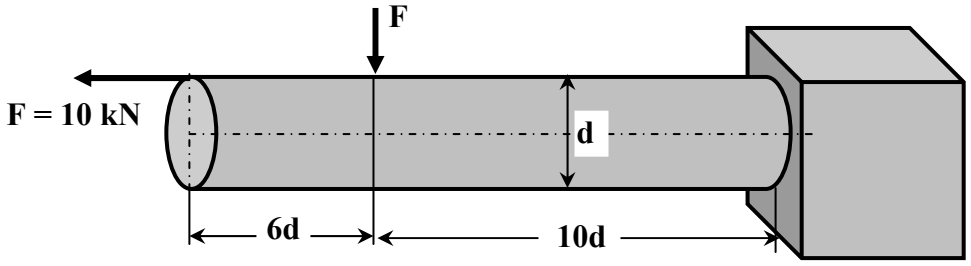


Fig.2.2.2.3-1

Rezolvare:

Se parcurg etapele cunoscute şi deja aplicate la exemplele precedente.

a) Bara reprezentată numai prin axa sa geometrică, se încarcă cu componentele obținute prin reducerea sarcinilor F şi 4F în centrul de greutate al secțiunii în care ele acționează (Fig.2.2.2.3-2)

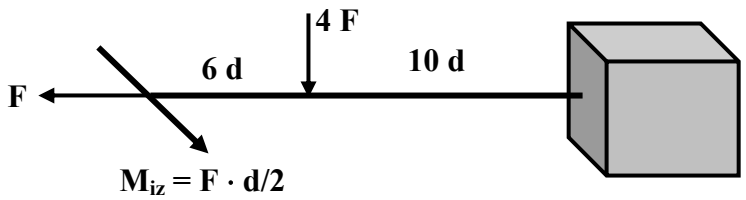


Fig.2.2.2.3-2

- Se trasează diagramele de eforturi (fără efortul tăietor) pentru sistemul din Fig.2.2.2.3-2. Aceste diagrame sunt prezentate în Fig.2.2.2.3-3.

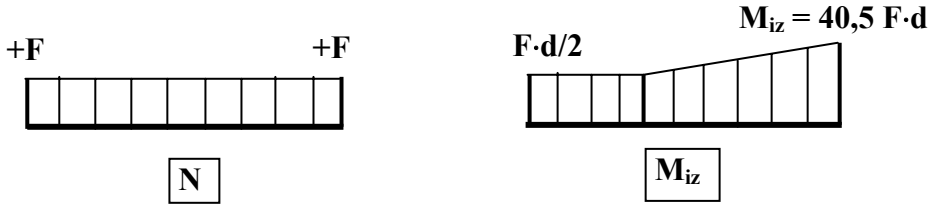


Fig.2.2.2.3-3

- Analizând diagramele de eforturi (Fig.2.2.2.3-3) şi variația secțiunii în lungul barei, se constată că secțiunea periculoasaă este în înțepenire (secțiune constantă şi eforturi maxime), unde acționează eforturile:

$$N = F = 10 \text{ KN}$$
$$M_{iz} = 40{,}5 \text{ F}\cdot\text{d}$$

- Secțiunea periculoasă este prezentată în Fig.2.2.2.3-4.
- În secțiunea periculoasă, există o solicitare compusă de categoria I, alcătuită din tracțiune şi încovoiere plană.

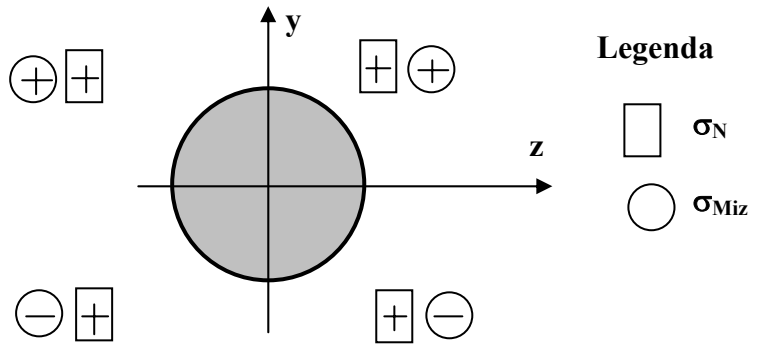


Fig.2.2.2.3-4

- Problema este de dimensionare, condiția de rezistență, secțiune circulară.
- Nu trebuie determinate punctele cele mai solicitate din secțiune.
- Relația de calcul utilizată (din Tabelul 2.2.1-1), este:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_{i,rez}}{W_z} = \sigma_a \qquad 2.2.2.3\text{-}1$$

unde:

$$M_{i,rez} = \sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2} = M_{iz} = 40{,}5F \cdot d \qquad 2.2.2.3\text{-}2$$

Particularizând pentru problema noastră, relația 2.2.2.3-1 capătă forma:

$$\frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} + \frac{40{,}5 \cdot F \cdot d}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \sigma_a \qquad 2.2.2.3\text{-}3$$

sau:

$$\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} + \frac{1.296 \cdot F}{\pi \cdot d^2} = 150 \qquad 2.2.2.3\text{-}4$$

de unde, se obține diametrul secțiunii transversale al barei:

$$d = \sqrt{\frac{1.300 \cdot F}{\pi \cdot 150}} = 166 \text{ mm}$$

b) Pentru reprezentarea variației tensiunii normale pe secțiune, se determină poziția axei neutre, din ecuația:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_0 = 0 \qquad 2.2.2.3\text{-}5$$

de unde rezultă singura tăietură a axei neutre cu axa principală Gy:

$$y_0 = -\frac{N}{M_{iz}} \cdot \frac{I_z}{A} = -\frac{d}{81 \cdot 8} = -0{,}256 \text{ mm}$$

- Pentru a putea reprezenta axa neutră, trebuie stabilit primul cadran. Această etapă este foarte bine prezentată în Fig.2.2.2.3-4. După cum se poate constata, atât cadranul trigonometric I cât şi II, pot fi considerate primul cadran pentru axele principale Gz şi Gy.
- Poziția axei neutre şi variația tensiunii normale σ în secțiunea periculoasă, este prezentată în Fig.2.2.2.3-5.
  În acest caz, mai trebuie calculată tensiunea normală maximă la compresiune (din punctul C), pentru valoarea lui d = 166 mm:

$$\sigma_{max,c} = \sigma_C = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot 166^2} + \frac{1.296 \cdot F}{\pi \cdot 166^2} = -147{,}3 \text{ MPa}$$

Valoarea σ_C este trecută în diagrama σ din Fig.2.2.2.3-5.

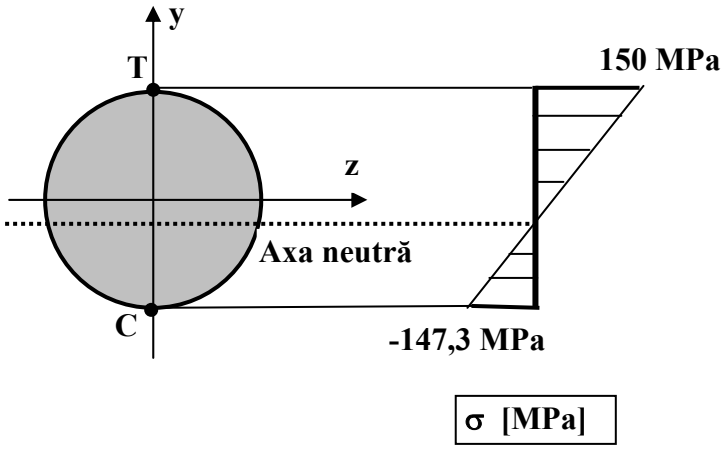


Fig.2.2.2.3-5

2.3 Solicitări compuse de categoria a II-a

2.3.1 Considerații generale. Etape de calcul

În cazul solicitărilor compuse de categoria a II-a, tensiunile dintr-un punct sunt de natură diferită (σ şi τ), iar o rezultantă a lor nu poate fi obținută. În acest caz de solicitare compusă, se calculează o ***tensiune echivalentă*** (σ_{ech}) după o anumită ***teorie de rezistență***.

Sunt acceptate cinci teorii de rezistență, iar pentru starea plană de tensiune, **tensiunea echivalentă** pentru cele cinci teorii de rezistență, se calculează cu relațiile:

a) *Teoria tensiunii normale maxime* (Teoria I):

$$\sigma_{ech(1)} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad 2.3.1\text{-}1$$

b) *Teoria deformației specifice maxime* (Teoria a II-a):

$$\sigma_{ech(II)} = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad 2.3.1\text{-}2$$

c) *Teoria tensiunii tangențiale maxime* (Teoria a III-a):

$$\sigma_{ech(III)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad 2.3.1\text{-}3$$

d) *Teoria energiei totale de deformație* (Teoria a IV-a):

$$\sigma_{ech(IV)} = \sqrt{\sigma^2 + 2{,}6\,\tau^2} \qquad 2.3.1\text{-}4$$

e) *Teoria energiei de variație a formei* (Teoria a V-a):

$$\sigma_{ech(V)} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \qquad 2.3.1\text{-}5$$

Cercetările experimentale au arătat că pentru materialele tenace, există o concordanță suficient de bună cu *Teoria a III-a* sau cu

Teoria a V-a. Din acest motiv, cele două teorii sunt preferate în calcul atunci când este vorba despre materiale tenace. În schimb, pentru materialele fragile, rezultate mai apropiate de realitate, prezintă *Teoria a II-a* de rezistență.

O situație particulară, o constituie calculul de rezistență a barelor drepte de secțiune circulară (în special al arborilor) solicitate numai la încovoiere şi torsiune. În acest caz particular, calculul se poate face pe baza relației:

$$\sigma_{ech,\,max(\ )} = \frac{M_{ech(\ )}}{W_z} \le \sigma_a \qquad 2.3.1\text{-}6$$

unde, momentul echivalent $M_{ech(\ )}$ după cele cinci teorii de rezistență, are următoarele expresii:

$$M_{ech(I)} = 0{,}5 \cdot [M_{i,rez} + \sqrt{M_{i,rez}^2 + M_t^2}\,] \qquad 2.3.1\text{-}7a$$

$$M_{ech(II)} = 0{,}35 \cdot M_{i,rez} + 0{,}65 \cdot \sqrt{M_{i,rez}^2 + M_t^2} \qquad 2.3.1\text{-}7b$$

$$M_{ech(III)} = \sqrt{M_{i,rez}^2 + M_t^2} \qquad 2.3.1\text{-}7c$$

$$M_{ech(IV)} = \sqrt{M_{i,rez}^2 + 0{,}65 \cdot M_t^2} \qquad 2.3.1\text{-}7d$$

$$M_{ech(V)} = \sqrt{M_{i,rez}^2 + 0{,}75 \cdot M_t^2} \qquad 2.3.1\text{-}7e$$

unde:

$$M_{i,rez}^2 = M_{iz}^2 + M_{iy}^2 \qquad 2.3.1\text{-}8$$

În cazul unei solicitări compuse de categoria a II-a unde este prezent şi efortul axial N, se utilizează numai relațiile 2.3.1-1...2.3.1-5.

Pentru acest tip de probleme, se parcurg în general aceleaşi etape care au fost prezentate la solicitarea compusă de categoria I, deosebiri apărând doar la calculul tensiunilor.

Iată **etapele** care trebuie parcurse pentru rezolvarea problemelor de acest tip:

- ♦ Se reprezintă elementele de rezistenţă numai prin axele lor geometrice.
- ♦ Se reduc toate sarcinile în centrul de greutate al secţiunii în care ele acţionează şi componentele obţinute se fixează pe elementul de rezistenţă reprezentat numai prin axa sa geometrică.
- ♦ Pentru sistemul astfel obţinut, se trasează diagramele de eforturi (fără efortul tăietor care se neglijează).
- ♦ Din analiza diagramelor de eforturi şi a variaţiei secţiunii transversale în lungul elementului de rezistenţă, se stabileşte secţiunea periculoasă.
- ♦ Se scriu eforturile din secţiunea periculoasă. Dacă în secţiunea periculoasă apare pe lângă N şi M_i ca efort şi momentul de torsiune M_t, înseamnă că în acea secţiune se realizează o solicitare compusă de categoria a II-a.
- ♦ Dacă secţiunea periculoasă este necirculară, aceasta se desenează şi se stabilesc punctele cele mai solicitate din această secţiune. Dacă secţiunea periculoasă este circulară, această etapă nu este necesară.
- ♦ Se scrie relaţia de calcul corespunzătoare teoriei de rezistenţă indicată în enunţul problemei sau teoria de rezistenţă aleasă de rezolvitor (rel. 2.3.1-1...2.3.1-5 sau 2.3.1-6).
- ♦ În funcţie de tipul problemei (verificare, dimensionare, efort capabil), din relaţia scrisă şi particularizată pentru datele problemei ce trebuie rezolvată, rezultă mărimea cerută în problemă.

Observaţie: Fiindcă la acest tip de probleme se lucrează cu tensiune echivalentă care nu poate fi reprezentată fizic, nu se mai poate cere şi reprezentarea variaţiei tensiunii pe secţiune.

2.3.2 *Modele de probleme rezolvate*

2.3.2.1 *Pe un arbore sunt montate două roţi de diametre D_1=400 mm şi D_2=240 mm, acţionate la periferie de forţele F_1=3 kN şi F_2, ca în Fig.2.3.2.1-1. Se cere, să se dimensioneze arborele de secţiune circulară cu diametrul d, utilizând la nevoie teoria a III-a de rezistenţă şi σ_a = 140 MPa.*

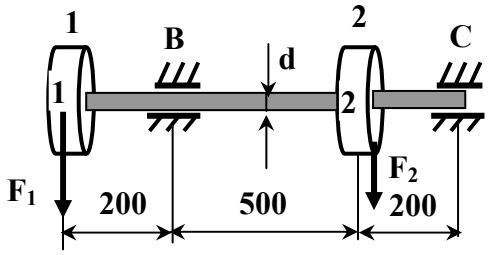


Fig.2.3.2.1-1

Rezolvare:

Se parcurg etapele prezentate la paragraful 2.3.1.

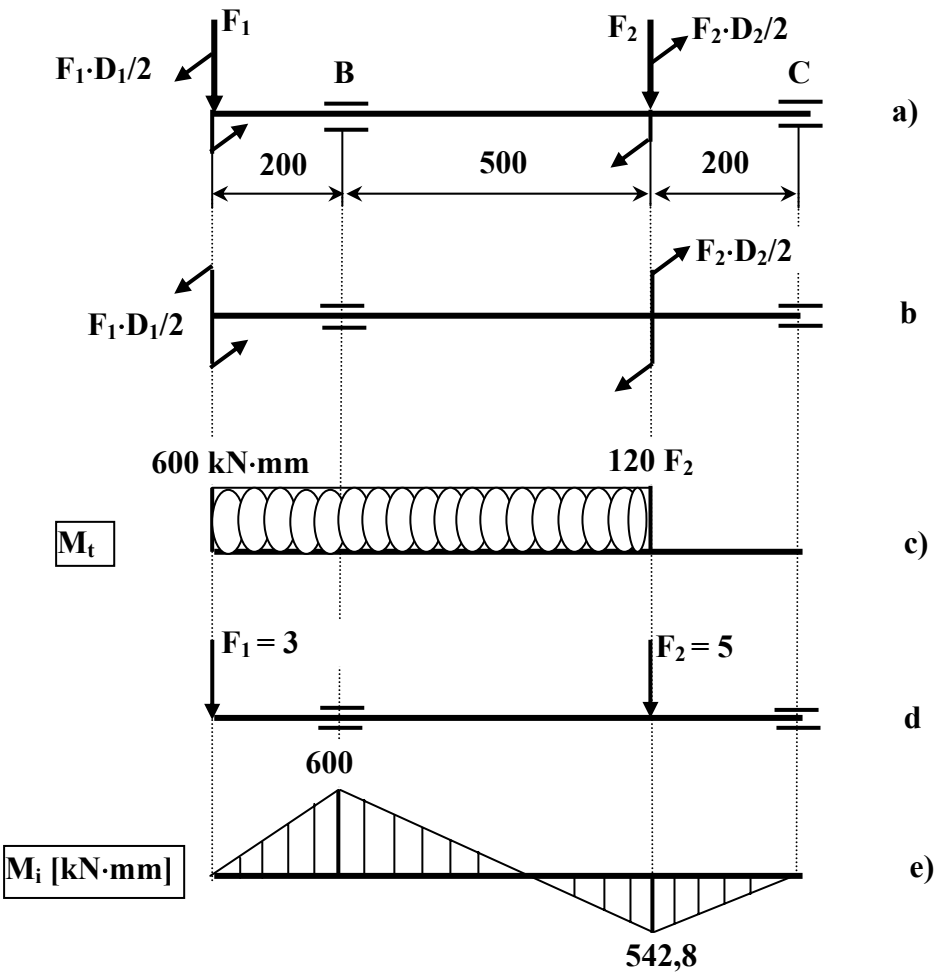
- ♦ Se reprezintă arborele (numai el ne interesează) numai prin axa sa geometrică (Fig.2.3.2.1-2a).
- ♦ Se reduc forţele F_1 şi F_2 (la o forţă şi la un moment de torsiune) în centrul de greutate al secţiunii în care ele acţionează şi componentele rezultate se pun pe arborele reprezentat numai prin axa sa geometrică (Fig.2.3.2.1-2a).
- ♦ Pentru trasarea diagramelor de eforturi se utilizează principiul suprapunerii efectelor:
- ➢ deoarece nu se cunoaşte valoarea lui F_2, se încarcă arborele reprezentat numai prin axa sa geometrică, cu momentele de torsiune obţinute prin reducerea forţelor F_1 şi F_2 (vezi Fig.2.3.2.1-2b) şi se trasează diagrama M_t (Fig.2.3.2.1-2c). Cum cele două momente de torsiune trebuie să fie egale (numai aşa se verifică salturile în diagrama M_t şi arborele este în echilibru la torsiune), rezultă:

$$F_1 \cdot \frac{D_1}{2} = F_2 \cdot \frac{D_2}{2} \qquad 2.3.2.1\text{-}1$$

de unde se obţine:

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{D_1}{D_2} = 3 \cdot \frac{400}{240} = 5 \quad kN \qquad 2.3.2.1\text{-}2$$

- Se încarcă acum arborele cu forţele F_1 şi F_2 (deja cunoscută ca valoare) ca în Fig.2.3.2.1-3d şi se trasează diagramele de momente M_i (Fig.2.3.2.1-2e).



- Din analiza diagramelor de eforturi şi a variaţiei secţiunii transversale a arborelui, rezultă că secţiunea periculoasă este cea de pe reazemul B.
- Eforturile din secţiunea periculoasă, sunt:

$$M_{iz} = 600 \text{ kN·mm}$$
$$M_t = 600 \text{ kN·mm}$$

de unde rezultă că în secțiunea periculoasă, există o solicitare compusă (încovoiere plană cu torsiune) de categoria a II-a.

- Secțiunea periculoasă este circulară şi nu este necesar a se stabili punctele cele mai solicitate din această secțiune.
- Fiindcă solicitarea compusă din secțiunea periculoasă este de încovoiere şi torsiune iar secțiunea este circulară, pentru calcul se scrie relația generală:

$$\sigma_{ech,\max(\ )} = \frac{M_{ech(\ )}}{W_z} \le \sigma_a \qquad 2.3.2.1\text{-}4$$

- Deoarece, prin enunțul problemei se impune pentru calcul teoria a III-a de rezistență, relația 2.3.2.1-4, poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{M_{ech(III)}}{W_z} \le \sigma_a \qquad 2.3.2.1\text{-}5$$

Problema fiind de dimensionare, relația 2.3.2.1.-5, devine:

$$W_{z,nec} = \frac{M_{ech(III)}}{\sigma_a} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \qquad 2.3.2.1\text{-}6$$

de unde se obține diametrul arborelui:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{ech(III)}}{\pi \cdot \sigma_a}} \qquad 2.3.2.1\text{-}7$$

Având în vedere expresia momentului echivalent după teoria a III-a de rezistență (relația 2.3.1-7c şi 2.3.1-8), relația 2.3.2.1-7, devine:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{M_{i,rez}^2 + M_t^2}}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{M_{iz}^2 + M_t^2}}{\pi \cdot \sigma_a}} \qquad 2.3.2.1\text{-}8$$

Înlocuind valorile momentelor M_{iz}, M_t şi σ_a, se obţine pentru d:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot \sqrt{\left(600 \cdot 10^3\right)^2 + \left(600 \cdot 10^3\right)^2}}{\pi \cdot 150}} \approx 40 \text{ mm} \qquad 2.3.2.1\text{-}9$$

2.3.2.2 *Pe un arbore sunt montate două roţi de curea. Curelele de transmisie acţionează asupra roţilor ca în Fig.2.3.2.2-1. Se cere să se dimensioneze arborele după teoria tensiunii tangenţiale maxime, cunoscând* σ_a *= 120 MPa.*

Se cunosc: diametrul roţii 1, D_1 *= 200 mm şi diametrul roţii 2,* D_2 *= 300 mm.*

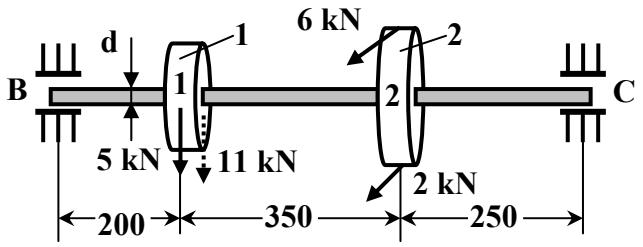


Fig.1.3.2.2-1

Rezolvare:

- Se reprezintă arborele (numai acesta ne interesează) prin axa sa geometrică şi se încarcă cu componentele obţinute din reducerea forţelor în centrul de greutate al secţiunilor în care ele acţionează (Fig.2.3.2.2.-2a).
- Trasarea diagramelor de eforturi, se face prin suprapunerea efectelor:
  - Se încarcă arborele cu momentele de torsiune (Fig.2.3.2.2-2b) şi se trasează diagrama M_t (Fig.2.3.2.2-2c).

- Se încarcă arborele numai cu forțele din plan vertical (Fig.2.3.2.2-2d) şi se trasează diagrama M_{iz} (Fig.2.3.2.2-2d).

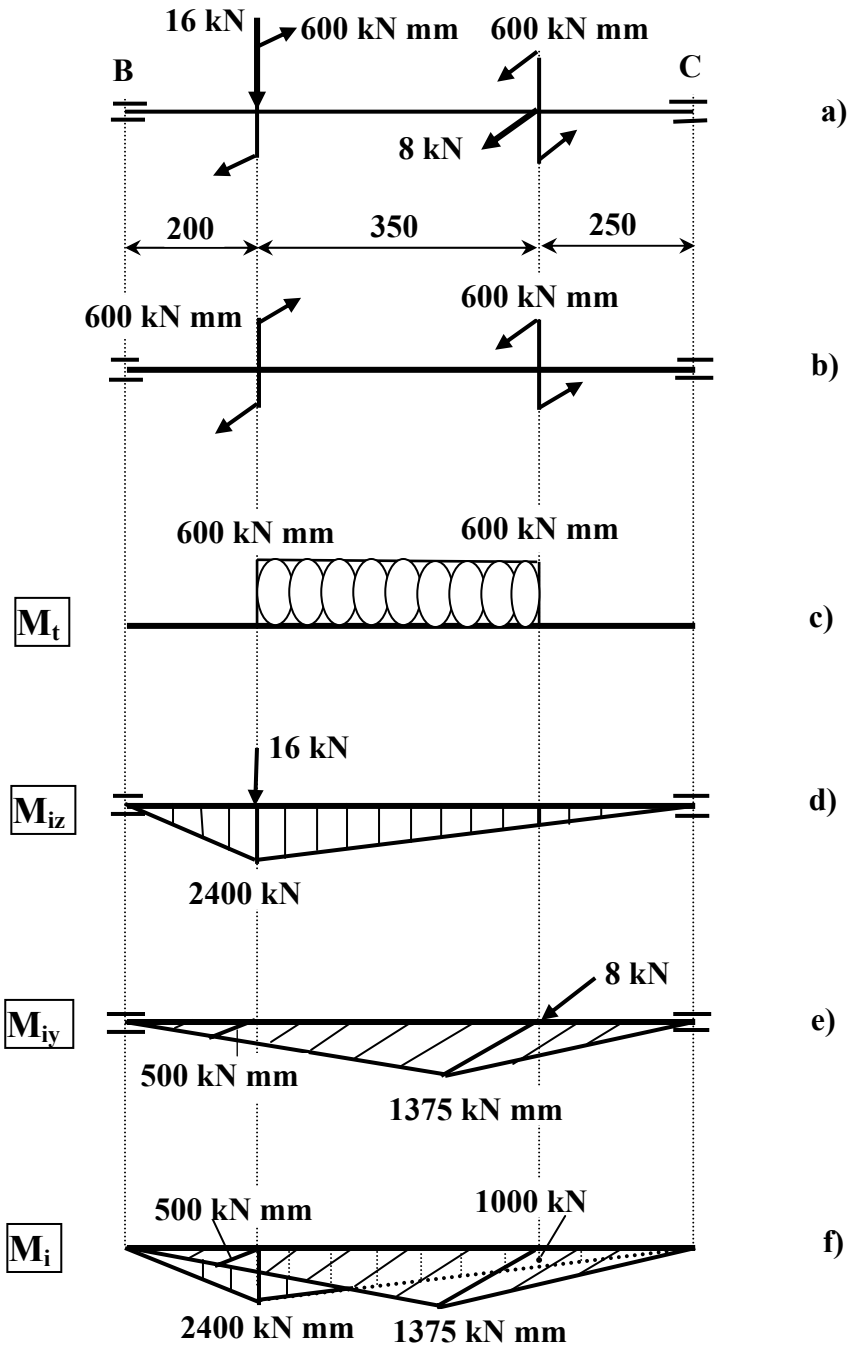


Fig.2.3.2.2-2

În această figură, încărcarea este pusă împreună cu diagrama de moment încovoietor.

- Se încarcă arborele numai cu forțele din plan orizontal (Fig.2.3.2.2-2e) şi se trasează diagrama M_{iy} (Fig.2.3.2.2-2e).

Şi aici încărcarea este pusă împreună cu diagrama de moment încovoietor.

După cum se poate observa, s-au obţinut diagrame de momente încovoietoare în două plane perpendiculare. Aceste diagrame sunt aduse într-o singură figură (Fig.2.3.2.2-2f), cu scopul de a putea determina mai uşor secţiunea periculoasă.

- Se stabileşte secţiunea periculoasă. Cum secţiunea arborelui şi momentul de torsiune sunt constante pe intervalul dintre cele două roţi, rezultă că secţiunea periculoasă este acolo unde momentul încovoietor rezultant este mai mare (maxim). Se calculează atunci $M_{i,rez}$ în secţiunile celor două roţi de curea:

$$M_{i,rez1} = \sqrt{\left(500\cdot 10^3\right)^2 + \left(2400\cdot 10^3\right)^2} = 2{,}45153\cdot 10^6 \ \ \mathrm{N\cdot mm} \qquad 2.3.2.2\text{-}1a$$

$$M_{i,rez2} = \sqrt{\left(1000\cdot 10^3\right)^2 + \left(1375\cdot 10^3\right)^2} = 1{,}70018\cdot 10^6 \ \ \mathrm{N\cdot mm} \qquad 2.3.2.2\text{-}1b$$

de unde rezultă că $M_{i,rez1} > M_{i,rez2}$, şi ca urmare, secţiunea periculoasă este secţiunea în care este montată roata 1.

- Eforturile din secţiunea periculoasă, sunt:

$$M_{i,rez} = 2.451{,}53 \ \mathrm{kN\cdot mm} \qquad 2.3.2.2\text{-}2a$$
$$M_t = 600 \ \mathrm{kN\cdot mm} \qquad 2.3.2.2\text{-}2b$$

rezultând o solicitare compusă de categoria a II-a.

- Relaţia de calcul pentru problema studiată (problemă de dimensionare, solicitare compusă de categoria a II-a, secţiune circulară, teoria a III-a de rezistenţă), este (vezi exemplul 2.3.2.1, relaţia 2.3.2.1-7 şi 2.3.2.1-8):

$$d = \sqrt[3]{\frac{32\cdot\sqrt{M_{i,rez}^2 + M_t^2}}{\pi\cdot\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{32\cdot\sqrt{(2{,}45\cdot 10^6)^2 + (0{,}6\cdot 10^6)^2}}{\pi\cdot 120}} = 56 \ \mathrm{mm}$$

2.3.2.3 *Pentru bara circulară din Fig.2.3.2.3-1, se cere să se verifice bara, utilizând teoria tensiunii tangențiale maxime, dacă d = 200 mm şi* σ_a *= 160 MPa.*

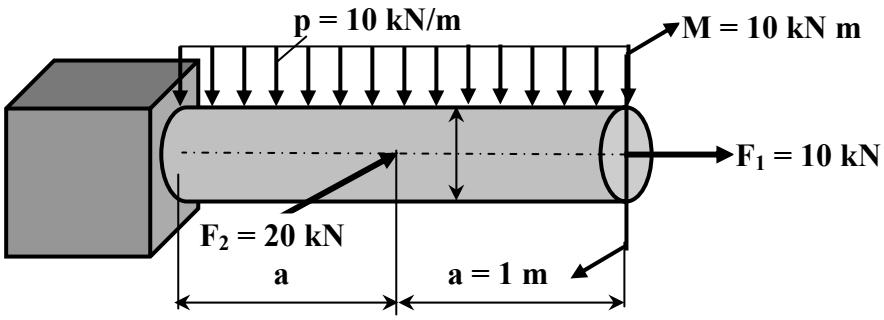


Fig.2.3.2.3-1

Rezolvare:

- Bara reprezentată numai prin axa sa geometrică şi încărcată cu componentele obținute prin reducerea sarcinilor, este prezentată în Fig.2.3.2.3-2a.
- Trasarea diagramelor de eforturi (fără efortul tăietor), se face prin suprapunere de efecte:
  - Forța F_1, creează numai efort axial (Fig.2.3.2.3-2b)
  - Sarcina distribuită p (Fig.2.3.2.3-2c), creează moment încovoietor M_{iz} (Fig.2.3.2.3-2d).
  - Forța concentrată F_2 (Fig.2.3.2.3-2e) creează moment încovoietor M_{iy} (Fig.2.3.2.3-2e).

Diagramele M_{iz} şi M_{iy}, sunt reprezentate împreună în diagrama din Fig.2.3.2.3-2f.

  - Momentul aplicat M, este de torsiune (Fig.2.3.2.3-2g) şi creează pe bară moment de torsiune M_t (Fig.2.3.2.3-2g).

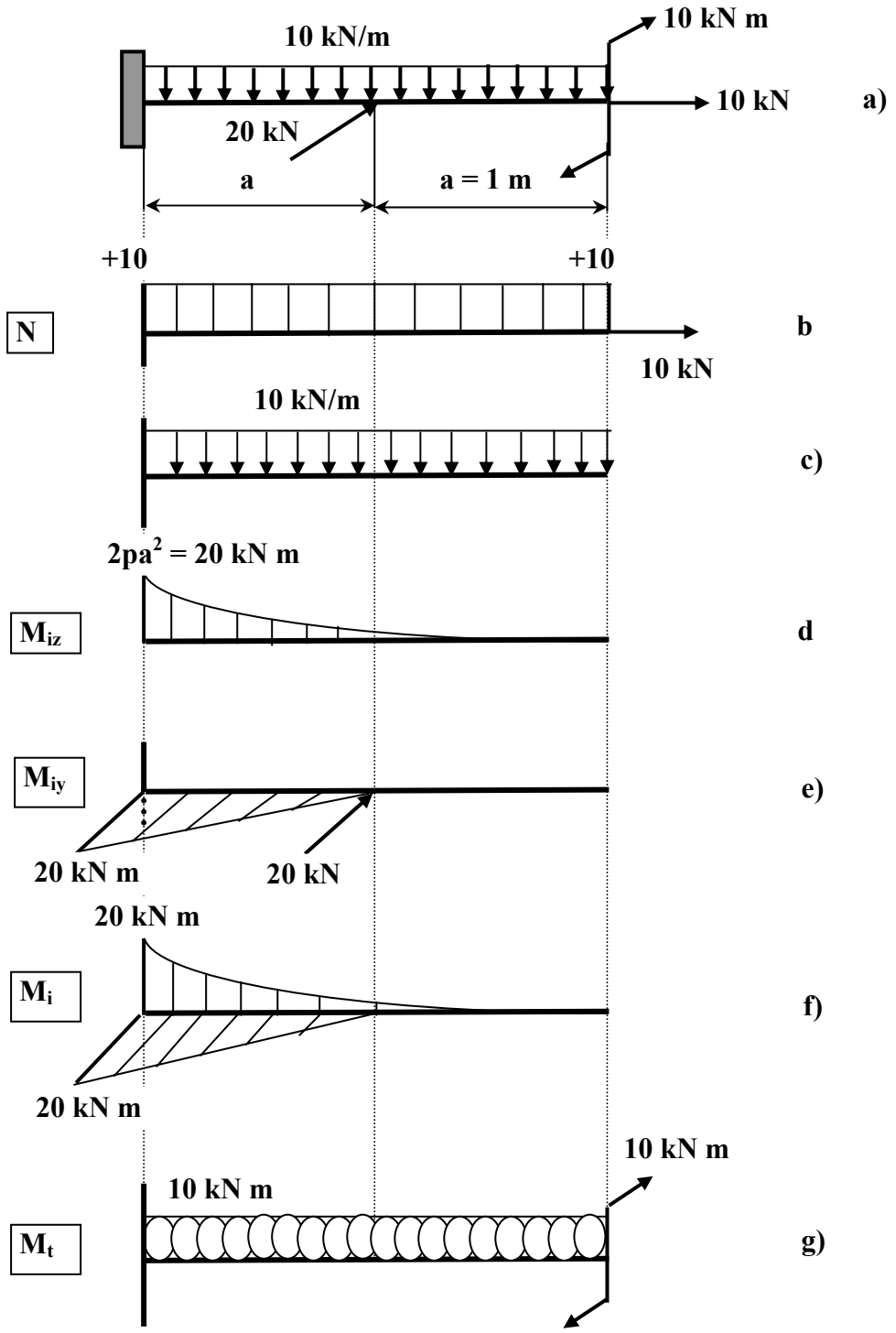


Fig.2.3.2.3-2

- Din analiza diagramelor de eforturi (Fig.2.3.2.3-2b,f,g) şi a variaţiei secţiunii barei, rezultă că secţiunea periculoasă este în încastrare.
- În secţiunea periculoasă, acţionează eforturile:

$$N = 10 \text{ kN} \qquad 2.3.2.3\text{-}2a$$
$$M_{iz} = 20 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad 2.3.2.3\text{-}2b$$
$$M_{iy} = 20 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad 2.3.2.3\text{-}2c$$
$$M_t = 10 \text{ kN}\cdot\text{m} \qquad 2.3.2.3\text{-}2d$$

- Relația de calcul (problemă de verificare, solicitare compusă de categoria a II-a având şi efort axial, secțiune circulară), este (rel. 2.3.1-3):

$$\sigma_{ech(III)} = \sqrt{\sigma_{rez}^2 + 4 \cdot \tau^2} \qquad 2.3.2.3\text{-}3$$

unde:

$$\sigma_{rez} = \frac{N}{A} + \frac{\sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2}}{W_z} = 0{,}318 + 36{,}025 = 36{,}343 \text{ MPa}$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = 6{,}36 \text{ MPa}$$

Cu aceste valori, relația 2.3.2.3-3, devine:

$$\sigma_{ech,\,max(III)} = \sqrt{36{,}343^{\,2} + 4 \cdot 6{,}36^{\,2}} = 38{,}5 \text{ MPa}$$

Cum $\sigma_{ech,max\ (III)} < \sigma_a = 160$ MPa, rezultă că această bara satisface condiția de rezistență cerută.

2.3.2.4 *Pentru bara cotită de secţiune circulară din Fig.2.3.2.4-1, se cere să se calculeze, folosind teoria a III-a de rezistenţă, forţa capabilă.*

Se dau: a = 200 mm, b = 300 mm, c = 500 mm, d = 80 mm, (d - diametrul secţiunii transversale al barei), σ_a *= 150 MPa.*

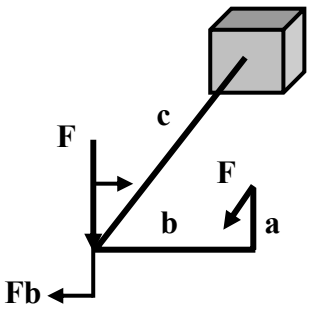


Fig.2.3.2.4-1

Rezolvare:

- Bara este deja reprezentată prin axa sa geometrică şi toate sarcinile acţionează în centrul de greutate al secţiunilor în care ele sunt aplicate.
- Diagramele de eforturi (fără efortul tăietor), sunt prezentate în Fig.2.3.2.4-2.

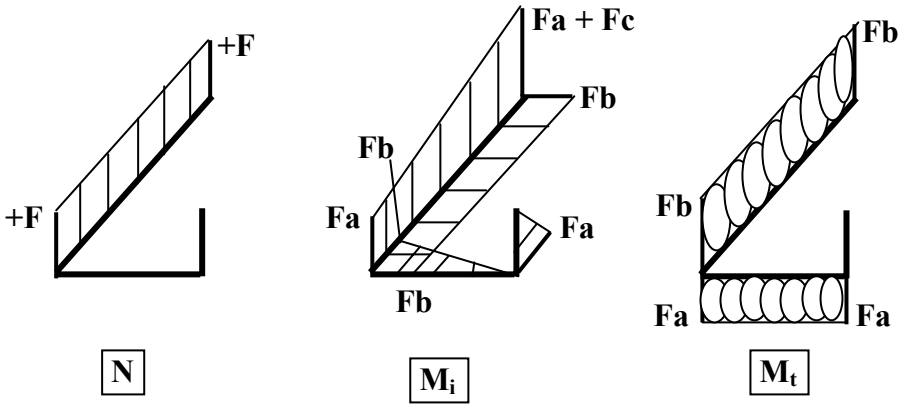


Fig.2.3.2.4-2

- Secţiunea periculoasă este în încastrare, unde acţionează eforturile:

$$N = F \qquad 2.3.2.4\text{-}2a$$

$M_{iz} = F \cdot (a + c)$ 2.3.2.4-2b
$M_{iy} = F \cdot b$ 2.3.2.4-2c
$M_t = F \cdot b$ 2.3.2.4-2d

- În secțiunea periculoasă, există o solicitare compusă de categoria a II-a.
- Relația de calcul pentru această problemă (problemă de efort capabil, solicitare compusă de categoria a II-a, secțiune circulară, teoria a III-a de rezistență), este (relația 2.3.1-3):

$$\sqrt{\sigma_{rez}^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sigma_a \qquad 2.3.2.4\text{-}3$$

unde:

$$\sigma_{rez} = \frac{N}{A} + \frac{M_{i,rez}}{W_z} = \frac{F}{A} + \frac{\sqrt{M_{iz}^2 + M_{iy}^2}}{W_z} = \frac{4F}{\pi \cdot d^2}\left(1 + \frac{8 \cdot \sqrt{(a+c)^2 + b^2}}{d}\right) \qquad 2.3.2.4\text{-}4$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{F \cdot b}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = \frac{16 \cdot F \cdot b}{\pi \cdot d^3} \qquad 2.3.2.4\text{-}5$$

Cu aceste valori pentru σ şi τ, relația 2.3.2.4-3, devine:

$$\frac{4F}{\pi \cdot d^2} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{8 \cdot \sqrt{(a+c)^2 + b^2}}{d}\right)^2 + 4 \cdot \frac{16 \cdot b^2}{\pi \cdot d^2}} = \sigma_a \qquad 2.3.2.4\text{-}6$$

de unde, se obține forța capabilă:

$$F_{cap} = \frac{\pi \cdot d^2 \cdot \sigma_a}{4 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{8 \cdot \sqrt{(a+c)^2 + b^2}}{d}\right)^2 + \frac{64 \cdot b^2}{\pi \cdot d^2}}} \approx 92 \ \text{kN}$$

2.3.2.5 *Pentru manivela de pornire a unui motor, reprezentată schematic în Fig.2.3.2.5-1, se cere să se calculeze tensiunea maximă. La nevoie se va utiliza teoria a treia de rezistenţă.*

Se cunosc: F = 150 N, a = 140 mm, b = 240 mm, d = 18 mm, σ_a *= 80 MPa.*

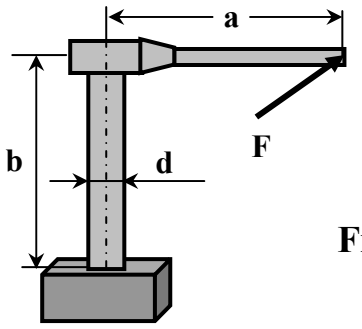


Fig.2.3.2.5-1

Rezolvare:

- Bara reprezentată numai prin axa sa geometrică şi reducerea forţei F în centrul de greutate al secţiunii în care ea acţionează, este prezentată în Fig.2.3.2.5-2a.

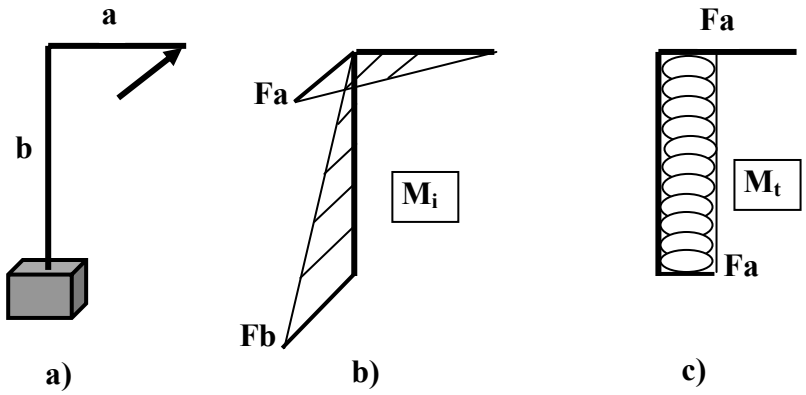


Fig.2.3.2.5-2

- Diagramele de eforturi, sunt prezentate în Fig.2.3.2.5-2b,c.
- Secţiunea periculoasă este în încastrare, unde acţionează eforturile:

$$M_{iz} = F \cdot b$$
$$M_t = F \cdot a$$

- Rezultă o solicitare compusă de categoria a II-a (încovoiere plană cu torsiune).
- Se utilizează relația:

$$\sigma_{ech,\max(III)} = \frac{M_{ech(III)}}{W_z} = \frac{\sqrt{M_{i,rez}^2 + M_t^2}}{W_z} \qquad 2.3.2.5\text{-}1$$

care explicitată pentru problema studiată, capătă forma:

$$\sigma_{ech,\max(III)} = \frac{\sqrt{(Fb)^2 + (Fa)^2}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{32 \cdot F \cdot \sqrt{b^2 + a^2}}{\pi \cdot d^3} =$$

$$= \frac{32 \cdot 150 \cdot \sqrt{240^2 + 140^2}}{\pi \cdot 18^3} \approx 73{,}4 \text{ MPa} < \sigma_a = 80 \text{ MPa}$$

După cum uşor se poate constata, condiția de rezistență este satisfăcută.

3. CALCULUL DEFORMAȚIILOR PRIN METODE ENERGETICE

3.1 Deformațiile la încovoiere ale elementelor de rezistență

Sub acțiunea forțelor exterioare, axa geometrică a unui element de rezistență se deformează. În Fig.3.1-1 se prezintă (linie întreruptă) la o scară mult mărită, axa deformată a unei grinzi încastrată la un capăt şi solicitată în capătul liber de o forță concentrată F.

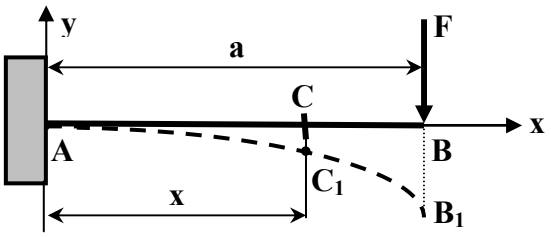


Fig.3.1-1

Centrul de greutate C al unei secțiuni oarecare de abscisă x, se deplasează în punctul C_1. Deplasarea CC_1 a centrului de greutate al secțiunii pe o direcție perpendiculară la axa grinzii, se numeşte ***săgeata grinzii*** (deplasarea grinzii) din dreptul secțiunii, sau ***săgeata*** secțiunii grinzii. Săgeata se notează cu v, y sau δ.

Deoarece axa grinzii, care se găseşte în planul neutru nu-şi modifică lungimea în urma încovoiereii, punctul C_1 se va deplasa lateral față de perpendiculara dusă pe axa grinzii. Totuşi săgețile v sunt mici în comparație cu lungimea grinzii şi deplasarea laterală amintită este un infinit mic de ordin superior față de lungimea grinzii, motiv pentru care aceasta (deplasarea laterală) se neglijează.

În urma deformării grinzii, secțiunea rămâne plană dar se roteşte față de poziția ei inițială. În Fig.3.1-2, se arată poziția secțiunii (de abscisă x), înainte şi după deformare.

Unghiul φ cu care fiecare secțiune se roteşte în raport cu poziția sa inițială, poartă numele de ***unghi de rotație*** al secțiunii, sau ***rotirea*** secțiunii.

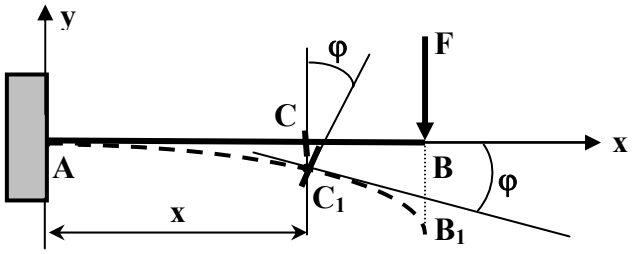


Fig.3.1-2

Pentru calculele de rezistență, este necesar uneori să se cunoască săgețile şi rotirile diferitelor secțiuni ale elementului de rezistență.

Valoarea maximă a deformațiilor (săgeți şi rotiri), poate servi drept criteriu pentru a se putea cunoaşte în ce măsură se deformează un element de rezistență sub acțiunea forțelor exterioare. Astfel, pentru grinzile metalice, în funcție de destinația lor, se impune ca săgeata să nu depăşească 1:1000 până la 1:250 din deschiderea grinzii.

În concluzie, la solicitarea de încovoiere, secțiunea unui element de rezistență, suferă două deformații:

- săgeata (deplasarea) secțiunii,
- rotirea secțiunii.

3.2 Metoda sarcinii unitare (Mohr-Maxwell) pentru calculul deformațiilor

Dintre metodele energetice utilizate pentru calculul deformațiilor elementelor de rezistență, se prezintă numai una şi anume: *metoda sarcinii unitare* sau *metoda Mohr-Maxwell*.

.

3.2.1 *Considerații generale. Etape de calcul*

Metoda sarcinii unitare sau metoda Mohr-Maxwell, este o metodă uşor de aplicat şi nerestrictivă. Ea poate fi aplicată tuturor sistemelor static determinate, indiferent de solicitarea la care acestea sunt supuse. Ridicarea nedeterminării sistemelor static nedeterminate, de asemenea se face uşor prin această metodă.

În cazul unei solicitări de încovoiere, pentru un element de rezistență cu un singur interval caracteristic de lungime a, deplasarea (săgeata) δ a unei secțiuni pe o anumită direcție, se calculează cu relația:

$$\delta = \int_0^a \frac{M_i m_i}{EI} dx \qquad 3.2.1\text{-}1$$

unde:

M_i - expresia momentului încovoietor pe acel interval, produs de sarcinile aplicate,

m_i - expresia momentului încovoietor pe acelaşi interval, produs de o forță concentrată unitară, aplicată în secțiunea în care se calculează deplasarea şi acționând pe direcția deplasării cerute,

EI - rigiditatea la încovoiere, față de axa după care este orientat momentul încovoietor (M_i şi m_i trebuie să fie orientați după aceiaşi axă principală).

Pentru acelaşi tip de element de rezistență şi acelaşi caz de solicitare (încovoiere), rotirea unei secțiuni se calculează cu relația:

$$\varphi = \int_0^a \frac{M_i m_i'}{EI} dx \qquad 3.2.1\text{-}2$$

unde:

m'_i - expresia momentului încovoietor de pe intervalul considerat, produs de un moment concentrat unitar, aplicat în secțiunea în care se calculează rotirea.

Dacă la determinarea momentelor încovoietoare M_i, m_i, m'_i, elementul de rezistență trebuie împărțit în mai multe intervale, atunci şi integrala din relația 3.3.1-1 şi 3.2.1-2, se descompune într-o sumă de integrale de forma:

$$\delta = \sum \int_0^a \frac{M_i m_i}{EI} dx \qquad 3.2.1\text{-}3$$

$$\varphi = \sum \int_0^a \frac{M_i m_i'}{EI} dx \qquad 3.2.1\text{-}4$$

Delimitarea intervalelor este impusă şi de existența pe fiecare interval a unei rigidități constante.

Pentru cazul existenței şi a solicitării axiale şi de torsiune şi a mai multor intervale caracteristice, relațiile 3.2.1-3 şi 3.2.1-4, capătă forma:

$$\delta = \sum \int_0^a \frac{M_i m_i}{EI} dx + \sum \int_0^a \frac{M_t m_t}{GI_t} dx + \sum \int_0^a \frac{Nn}{EA} dx \qquad 3.2.1\text{-}5$$

$$\varphi = \sum \int_0^a \frac{M_i m'_i}{EI} dx + \sum \int_0^a \frac{M_t m'_t}{GI_t} dx + \sum \int_0^a \frac{Nn'}{EA} dx \qquad 3.2.1\text{-}6$$

unde:

N, n, n', M_t, m_t, m'_t au aceeaşi semnificație, numai că se referă la solicitarea axială, respectiv torsiune.

Pentru secțiuni circulare, rigiditatea la torsiune GI_t, devine GI_p.

Deoarece, deformațiile produse de efortul axial N şi tăietor T sunt mici în comparație cu cele produse de încovoiere şi torsiune,

acestea se neglijează. Din acest motiv, în relațiile 3.2.1-5 şi 3.2.1-6, nu apare efortul tăietor, ci numai cel axial, încovoietor şi de torsiune.

Pentru calculul deformațiilor l**a încovoiere şi torsiune**, se parcurg următoarele **etape** (sistemul trebuie să fie static determinat):

- ♦ În funcție de sarcinile aplicate, secțiunile în care se calculează deformațiile şi rigiditatea elementului, se stabilesc intervalele caracteristice.
- ♦ Pentru elementul de rezistență încărcat cu sarcinile aplicate, pe fiecare interval caracteristic, se scriu funcțiile de eforturi (notate M_i, M_t).
- ♦ Se eliberează sistemul de sarcinile aplicate, rezultând un sistem neîncărcat.

Aceste prime etape sunt comune, indiferent că se calculează deplasări sau rotiri.

Pentru **calculul deplasării unei secțiuni**, se parcurg **etapele**:

- ♦ Pe sistemul obținut mai înainte (neîncărcat), în secțiunea în care se calculează deplasarea şi pe direcția deplasării cerute, se pune o forță concentrată unitară (de valoare unu).
- ♦ Pentru elementul de rezistență astfel încărcat, se scriu pe fiecare interval caracteristic funcțiile de eforturi, notate m_i, m_t.
- ♦ Având stabilite funcțiile M_i, M_t, m_i şi m_t, pe fiecare interval caracteristic se aplică relația 3.2.1-5 şi astfel după rezolvarea relației, se obține deplasarea cerută.

Pentru **calculul rotirii unei secțiuni**, se parcurg **etapele**:

- ♦ Elementul de rezistență neîncărcat (obținut după primele trei etape), se încarcă cu un moment concentrat unitar (de valoare unu) în secțiunea în care trebuie determinată rotirea.
- ♦ Pentru acest sistem astfel încărcat, se scriu funcțiile de eforturi, care se notează cu m'_i, respectiv m'_t.
- ♦ Având stabilite funcțiile M_i, M_t, m'_i şi m'_t, se aplică relația 3.2.1-6, iar după rezolvarea acesteia, se obține valoarea rotirii cerute.

Rezultatele cu semnul +, confirmă că deformaţiile se produc în sensul sarcinilor unitare aplicate, iar semnul - , în sens contrar sensului sarcinilor unitare aplicate.

3.2.2 *Modele de probleme rezolvate*

3.2.2.1 *Pentru cadrul de rigiditate constantă din Fig.3.2.2.1-1, se cere*:

a) *deplasarea totală a secţiunii în care acţionează forţa F,* (δ_1=?)

b) *rotirea secţiunii 2,* (φ_2 = ?).

Pentru ambele deformaţii, se va neglija efectul efortului axial şi tăietor.

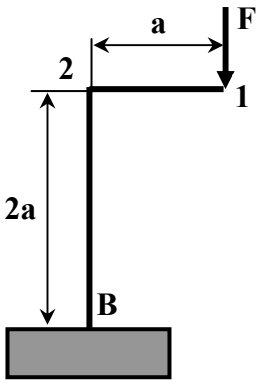


Fig.3.2.2.1-1

Rezolvare:

Se parcurg etapele recomandate pentru astfel de probleme.

- Pentru cadrul din Fig.3.2.2.1-1, ţinând seama de rigiditatea sa şi de deformaţiile cerute, rezultă două intervale caracteristice: 1 - 2 şi 2 - B, (Fig.3.2.2.1-2) .

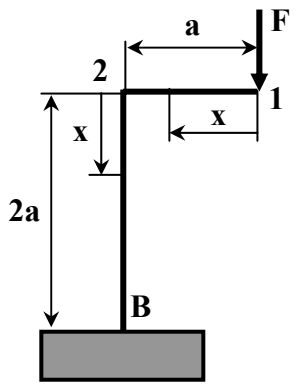


Fig.3.2.2.1-2

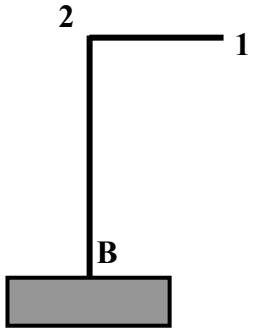


Fig.3.2.2.1-3

- Funcțiile de eforturi pe aceste intervale caracteristice, sunt (N, T se neglijează, M_t nu există):

Intervalul 1 - 2, $M_i = F \cdot x$ 3.2.2.1-1
Intervalul 2 - B, $M_i = F \cdot a$ 3.2.2.1-2

- Se eliberează cadrul de sarcinile aplicate, rezultând sistemul din Fig.3.2.2.1-3.

a) Să calculăm deplasarea totală a secțiunii 1, secțiune în care acționează forța aplicată F, (vezi Fig.3.2.2.1-4).

- Deplasarea totală a secțiunii 1 (δ_1) este segmentul 11'. Nu este cunoscută direcția deplasării secțiunii 1, dar ea poate fi scrisă, funcție de deplasarea pe orizontală şi verticală a acestei secțiuni (Fig.3.2.2.1-4), astfel:

$$11' = \delta_1 = \sqrt{\delta_{1H}^2 + \delta_{1V}^2} \qquad 3.2.2.1\text{-}3$$

Aşadar, pentru calculul deplasării totale a secțiunii 1, trebuie calculate deplasarea pe orizontală δ_{1H} şi cea pe vericală δ_{1V}, ale secțiunii 1.
Pentru început, calculăm deplasarea pe orizontală a secțiunii 1.

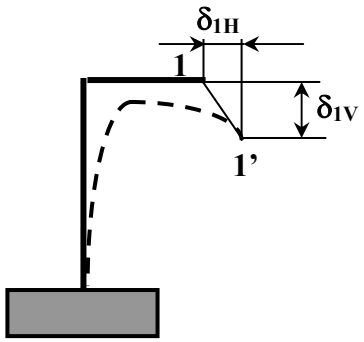


Fig.3.2.2.1-4

- Punem în secțiunea 1 a sistemului din Fig.3.2.2.1-3, o forță concentrată unitară, orientată pe orizontală (Fig.3.2.2.1-5).

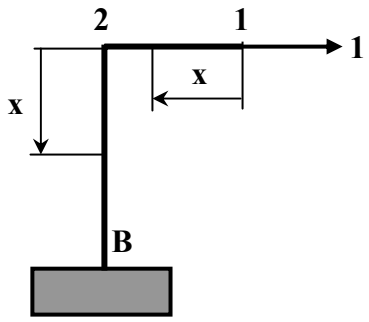


Fig.3.2.2.1-5

- Pe cele două intervale caracteristice 1 - 2 şi 1 - B, funcțiile de eforturi, sunt:

Intervalul 1 - 2: $m_i = 0$ 3.2.2.1-4

Intervalul 2 - B: $m_i = 1 \cdot x$ 3.2.2.1-5

- Cu funcțiile de eforturi date de relațiile 3.2.2.1-1, 3.2.2.1-2, 3.2.2.1-4, 3.2.2.1-5, se scrie relația 3.2.1-3:

$$\delta_{1H} = \int_0^a \frac{Fx \cdot 0}{EI} dx + \int_0^{2a} \frac{Fa \cdot x}{EI} dx = \frac{2Fa^3}{EI} \qquad 3.2.2.1\text{-}6$$

Calculăm acum deplasarea secțiunii 1, pe verticală.

- Încărcăm cadrul din Fig.3.2.2.1-3, în secțiunea 1, cu o forță concentrată unitară, orientată pe verticală (Fig.3.2.2.1-6).

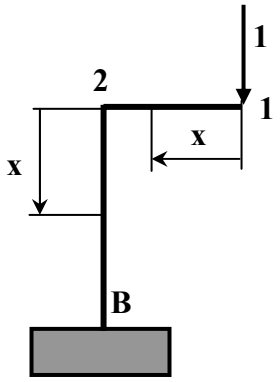


Fig.3.2.2.1-6

Pe aceleaşi intervale caracteristice, scriem funcțiile de eforturi:

Intervalul 1 - 2: $m_i = 1 \cdot x$ 3.2.2.1-7

Intervalul 2 - B: $mi = 1 \cdot a$ 3.2.2.1-8

- Cu funcțiile eforturilor M_i (rel.3.2.2.1-1,2) şi m_i (rel.3.2.2.1-7,8), se calculează (cu relația 3.2.1-3) deplasarea pe verticală a secțiunii 1:

$$\delta_{1V} = \int_0^a \frac{Fx \cdot x}{EI} dx + \int_0^{2a} \frac{Fa \cdot a}{EI} dx = \frac{7Fa^3}{3EI} \qquad 3.2.2.1\text{-}9$$

Ținând seama de relațiile 3.2.2.1-6 şi 3.2.2.1-9, cu relația 3.2.2.1-3, se obține deplasarea totală a secțiunii 1:

$$\delta_1 = \sqrt{\delta_{1H}^2 + \delta_{1V}^2} = \frac{\sqrt{85} \cdot Fa^3}{3EI} \qquad 3.2.2.1\text{-}10$$

b) Pentru calculul rotirii secțiunii 2, se procedează astfel:

- Sistemul din Fig.3.2.2.1-3, se încarcă în secțiunea 2, cu un moment concentrat unitar (Fig.3.2.2.1-7).

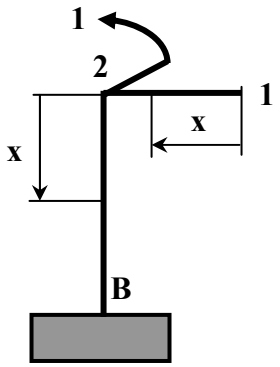


Fig.3.2.2.1-7

- Pentru sistemul din Fig.3.2.2.1-7, pe cele două intervale caracteristice, se scriu funcțiile de eforturi m'_i:

Intervalul 1 - 2: $m'_i = 0$ 3.2.2.1-11
Intervalul 2 - B: $m'_i = -1$ 3.2.2.1-12

- Cu funcțiile de eforturi M_i (rel. 3.2.2.1-1,2) şi m'_i (rel.3.2.2.1-11,12), aplicând relația 3.2.1-4, se calculează rotirea secțiunii 2:

$$\delta_2 = \int_0^a \frac{Fx \cdot 0}{EI} dx + \int_0^{2a} \frac{Fa \cdot (-1)}{EI} dx = -\frac{2Fa^2}{EI} \qquad 3.2.2.1\text{-}13$$

Semnul - (minus) pentru rotire, arată că rotirea secțiunii 2, se produce în sens invers sensului momentului concentrat unitar aplicat în secțiunea 2. Modul de deformare al cadrului prezentat în Fig.3.2.2.1-4, confirmă această concluzie.

3.2.2.2 *Pentru bara de rigiditate constantă din Fig.3.2.2.1-1, să se calculeze:*

a) *deplasarea pe verticală a secțiunii 1,*

b) *deplasarea pe orizontală a secțiunii 1,*

c) *rotirea secțiunii 1.*

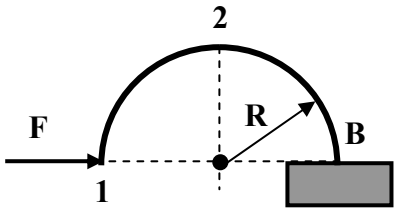


Fig.3.2.2.2-1

Rezolvare:

Se parcurg etapele deja însuşite, pentru calculul deformațiilor. Şi la acest exemplu, se va ține seama numai de efectul momentelor.

Pentru această bară, există un singur interval, 1 - B.

- Pentru bara din Fig.3.2.2.2-1, se scrie expresia momentului încovoietor (moment de torsiune nu există) în secțiunea α din intervalul 1 - B (Fig.3.2.2.2-2):

$$M_i = - F \cdot R \cdot \sin \alpha \qquad 3.2.2.2\text{-}1$$

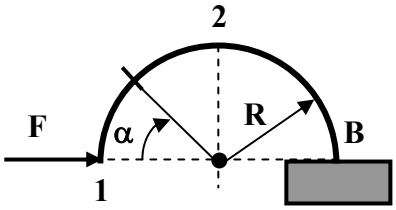


Fig.3.2.2.2-2

- Se eliberează bara de sarcina F aplicată şi rezultă sistemul din Fig.3.2.2.2-3.

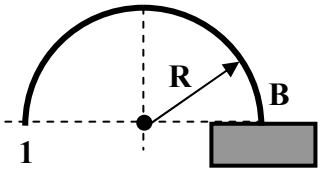


Fig.3.2.2.2-3

Pentru a calcula deformațiile cerute, se procedează astfel:

a) Pentru calculul deplasării pe vericală a secțiunii 1, pe bara din Fig.3.2.2.2-3, în secțiunea 1, se pune pe verticală o forță concentrată unitară (Fig.3.2.2.2-4) şi pentru care în secțiunea α, se scrie expresia momentului încovoietor m_{iV}:

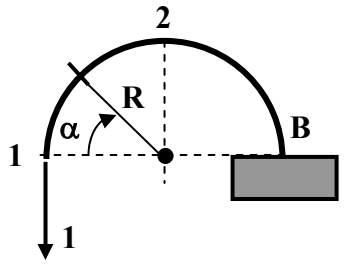


Fig.3.2.2.2-4

$$m_{iV} = -1\cdot(R - R\cos\alpha) = -R\cdot(1 - \cos\alpha) \qquad 3.2.2.2\text{-}2$$

- Cu funcțiile de eforturi M_i (rel.3.2.2.2-1) şi m_{iV} (rel.3.2.2.2-2), aplicând relația 3.2.1-1, se calculează deplasarea pe vericală a secțiunii 1:

$$\delta_{1V} = \int_0^{\pi} \frac{(-FR\sin\alpha)\cdot[-R(1-\cos\alpha)]}{EI}\cdot R\cdot d\alpha = -\frac{2FR^3}{EI}$$

b) Pentru calculul deplasării pe orizontală a secțiunii 1, pe bara din Fig.3.2.2.2-3, în secțiunea 1, se pune pe orizontală o forță concentrată unitară (vezi Fig.3.2.2.2-5) şi pentru care în secțiunea α, se scrie funcția momentului încovoietor, m_{1H}:

$$m_{iH} = -1\cdot R\cdot \sin\alpha = -R\cdot\sin\alpha \qquad 3.2.2.2\text{-}3$$

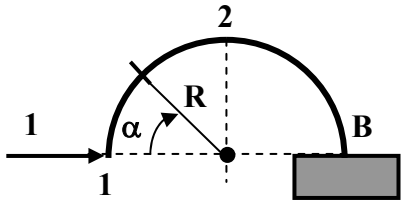


Fig.3.2.2.2-5

- Cu expresiile M_i (rel.3.2.2.2-1) şi m_{1H} (rel.3.2.2.2-3), aplicând relația 3.2.1-1, se calculează deplasarea pe orizontală a secțiunii 1:

$$\delta_{1H} = \int_0^{\pi} \frac{(-FR \cdot \sin\alpha) \cdot (-R \cdot \sin\alpha)}{EI} \cdot R \cdot d\alpha = \frac{\pi \cdot FR^3}{2EI}$$

Cu deplasările δ_{1V} şi δ_{1H}, se poate calcula deplasarea totală δ_1 a secțiunii 1, cu relația:

$$\delta_1 = \sqrt{\delta_{1V}^2 + \delta_{1H}^2} = \frac{FR^3}{2EI} \cdot \sqrt{4 + \pi^2}$$

c) Pentru calculul rotirii secțiunii 1, pe bara din Fig.3.2.2.2-3, în secțiunea 1, se pune un moment concentrat unitar (vezi Fig.3.2.2.2-6), pentru care apoi, se scrie în secțiunea α, expresia momentului încovoietor m'_1:

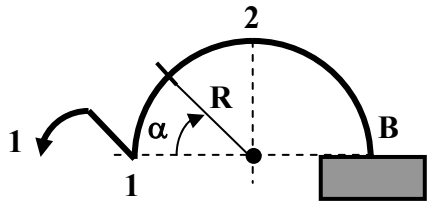


Fig.3.2.2.2-6

$$m'_1 = -1 \qquad 3.2.2.2\text{-}4$$

- Cu funcțiile de eforturi M_i (rel.3.2.2.2-1) şi m'_1 (rel.3.2.2.2-4), aplicând relația 3.2.1-4, se calculează rotirea secțiunii 1:

Observație: La barele drepte, în relația 3.2.1-1 variabila este *x* şi diferențiala *dx*, iar la barele curbe, variabila este arcul de pe curbă, iar diferențiala *trebuie* să fie *ds*. Cum însă la bare curbe, variabila se ia unghiul α, pentru a putea efectua integralele, trebuie adusă şi diferențiala la $d\alpha$. Relația dintre diferențiala curbilinie *ds* şi cea unghiulară $d\alpha$, este:

$$ds = R \cdot d\alpha$$

Aceasta este explicația pentru care în relațiile de calcul ale lui δ_{1V}, δ_{1H} şi φ în loc de *dx* în relațiile 3.2.1-1 ... 3.2.1-4, apare ($R \cdot d\alpha$).

3.3 Metoda sarcinii unitare, procedeul Veresceaghin

3.3.1 *Considerații generale. Etape de calcul*

Nu întotdeauna rezolvarea integralelor (mai ales în cazul prezenței mai multor sarcini) pentru calculul deformațiilor, este uşor de făcut. Deoarece, sarcina unitară este fie o forță unitară fie un cuplu unitar, diagramele m_i, m_t, m'_i, m'_t sunt limitate de linii drepte (funcțiile acestor eforturi sunt liniare). În acest caz, integralele de forma:

$$\int M_i m_i \cdot dx$$

etc. pentru orice contur, pot fi înlocuite cu alte mărimi.

Veresceaghin, a propus înlocuirea diagramelor de tipul celor utilizate de Mohr-Maxwell, rezultând un nou procedeu de calcul a deformațiilor. Trebuie specificat că, ceea ce a propus Veresceaghin *este un procedeu* şi nu o metodă nouă, deoarece metoda este aceeaşi, cea a sarcinii unitare (Mohr-Maxwell), numai că rezolvarea integralelor se face printr-o metodă grafo-analitică.

Procedeul Veresceaghin, poate fi aplicat numai pe acele intervale pe care funcțiile eforturilor m_i, m_t, m'_i, m'_t sunt liniare, deci acest procedeu nu poate fi aplicat barelor curbe.

Calculul deformațiilor, prin procedeul Veresceaghin, se face pe baza următoarelor relații:

- deplasarea unei secțiuni

$$\delta = \sum \frac{\Omega_N \cdot n_c}{EA} + \sum \frac{\Omega_i \cdot m_{ic}}{EI} + \sum \frac{\Omega_t \cdot m_{tc}}{GI_t} \qquad 3.3.1\text{-}1$$

- rotirea unei secțiuni

$$\varphi = \sum \frac{\Omega_N \cdot n'_c}{EA} + \sum \frac{\Omega_i \cdot m'_{ic}}{EI} + \sum \frac{\Omega_t \cdot m'_{tc}}{GI_t} \qquad 3.3.1\text{-}2$$

unde:

$\Omega_N, \Omega_i, \Omega_t$ - aria suprafeței diagramei de efort axial, încovoietor, respectiv de torsiune, pe fiecare interval caracteristic, produsă de sarcinile aplicate,

n_c, m_{ic}, m_{tc} - valoarea efortului axial, încovoietor, respectiv de torsiune, din secțiunea corespunzătoare centrului de greutate a suprafețelor $\Omega_N, \Omega_i, \Omega_t$, eforturi produse de sarcinile unitare concentrate puse în secțiunile în care se calculează deformațiile.

Procedeul Veresceaghin, după cum se poate observa, impune trasarea diagramelor de eforturi atât pentru sarcinile aplicate cât şi pentru cele unitare puse în secțiunile în care trebuie calculate deformațiile.

Pentru calculul deformațiilor prin metoda sarcinii unitare, dar **procedeul Veresceaghin**, trebuie parcurse, următoarele **etape**:

- Pentru sistemul dat, se trasează diagramele de eforturi N, M_i, M_t (prin suprapunere de efecte), produse de sarcinile aplicate.
- Se eliberează sistemul dat, de toate sarcinile aplicate, rezultând un sistem neîncărcat.
- Pentru **calculul deplasării** unei secțiuni pe o anumită direcție, se procedează, astfel:
- Pe elementul de rezistență neîncărcat (obținut mai înainte), se pune o forță unitară concentrată, în secțiunea în care se calculează deplasarea şi având direcția deplasării cerute.
- Pentru acest sistem astfel încărcat, se trasează diagramele de eforturi n, m_i, m_t.
- În funcție de diagramele sarcinilor aplicate, a rigidității elementului de rezistență şi a diagramelor forțelor unitare, se delimitează intervalele caracteristice.
  - Suprafețele diagramelor N, M_i, M_t de pe fiecare interval caracteristic, se împarte în suprafețe simple, la care se cunoaşte aria şi poziția centrului de greutate.
  - Se calculează ariile acestor diagrame, rezultând $\Omega_N, \Omega_i, \Omega_t$.
  - Se poziționează centrele de greutate ale acestor suprafețe.
  - Se calculează în diagramele n, m_i, m_t, valoarea eforturilor din secțiunile corespunzătoare centrelor de greutate ale

suprafețelor de arie Ω_N, Ω_i, Ω_t, pe care le notăm cu n_c, m_{ic}, m_{tc}.

- Cu ariile Ω_N, Ω_i, Ω_t şi valorile n_c, m_{ic}, m_{tc}, pe baza relației 3.3.1-1, se calculează deplasarea secțiunii pe direcția cerută.

Pentru **calculul rotirii** unei secțiuni, se procedează astfel:

- Pe elementul de rezistență neîncărcat, în secțiunea în care trebuie calculată rotirea, se pune un moment concentrat unitar.
- Pentru acest sistem, se trasează diagramele de eforturi n', m'_i, m'_t.
- În funcție de diagramele sarcinilor aplicate, a rigidității elementului de rezistență şi a diagramelor momentului unitar, se delimitează intervalele caracteristice.
- Suprafețele diagramelor N, M_i, M_t de pe fiecare interval caracteristic se împart în suprafețe simple la care se cunoaşte aria şi poziția centrului de greutate. De cele mai multe ori, aceste suprafețe sunt aceleaşi cu cele de la calculul deplasărilor.
- Se calculează ariile acestor diagrame, rezultând Ω_N, Ω_i, Ω_t.
- Se poziționează centrul de greutate al acestor diagrame.
- Se calculează în diagramele n', m'_i, m'_t, valoarea eforturilor din secțiunile corespunzătoare centrelor de greutate ale suprafețelor de arii Ω_N, Ω_i, Ω_t, pe care le notăm cu n'_c, m'_{ic}, m'_{tc}.
- Cu ariile Ω_N, Ω_i, Ω_t şi valorile n'_c, m'_{ic}, m'_{tc}, pe baza relației 3.3.1-2, se calculează rotirea secțiunii cerute.

În Fig.3.3.1-1, se prezintă relațiile de calcul a ariei şi poziția centrului de greutate, pentru cele mai întâlnite forme ale diagramelor de eforturi.

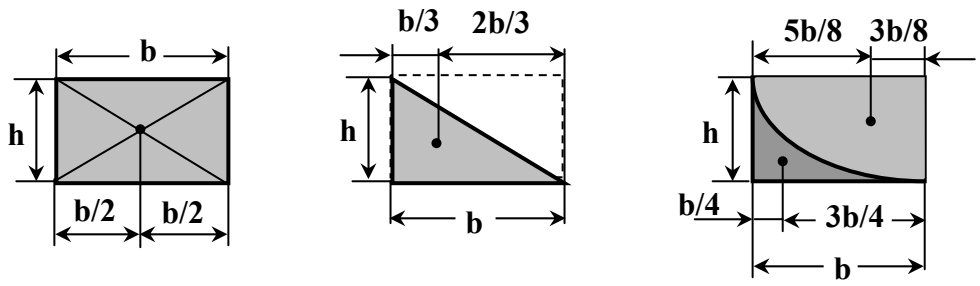


Fig.3.3.1-1

3.3.2 Modele de probleme rezolvate

Pentru început, se va rezolva prin procedeul Veresceaghin, cadrul rezolvat la exemplul 3.2.2-1 prin procedeul Mohr-Maxwell.

3.3.2.1 *Pentru cadrul de rigiditate constantă din Fig.3.3.2.1-1, se cere:*

a) *deplasarea totală a secțiunii* 1 (δ_1 = ?)

b) *rotirea secțiunii* 2 (φ_2 = ?).

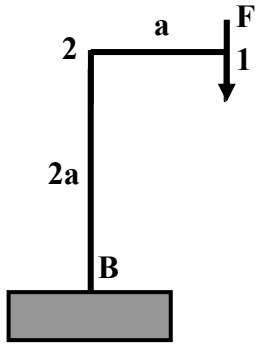


Fig.3.2.2.1-2

Rezolvare:

Se vor urmări etapele prezentate mai înainte, referitoare la aplicarea procedeului Veresceaghin pentru calculul deformațiilor. Pentru acest exemplu, se va ține seama numai de momentul încovoietor (N, T se neglijează iar M_t nu există).

a) Pentru sistemul dat, se trasează diagrama de moment încovoietor M_i (Fig.3.3.2.1-2a).

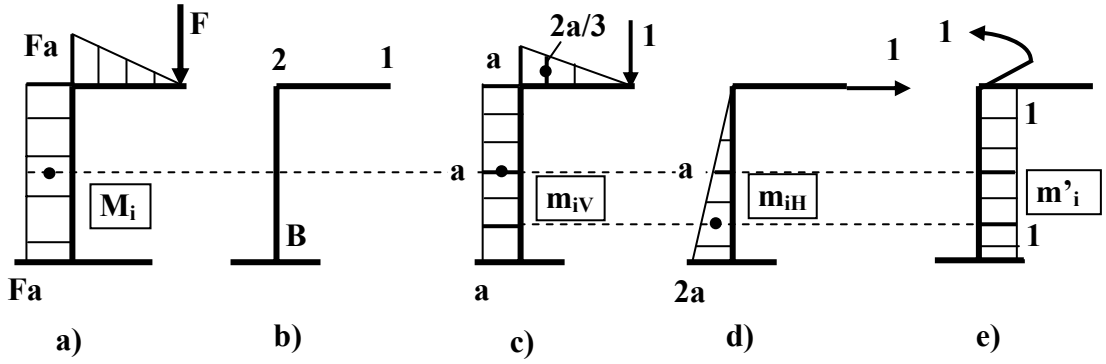


Fig.3.3.2.1-2

- ♦ Se eliberează sistemul dat (Fig.3.3.2.1-1) de toate sarcinile aplicate, rezultând cadrul din Fig.3.3.2.1-2b.
- ♦ Se încarcă cadrul din Fig.3.3.2.1-2b cu o forță concentrată unitară, aplicată pe verticală în secțiunea 1 (Fig.3.3.2.1-2c) şi se trasează diagrama m_{iV} (Fig.3.3.2.1-2c).
- ♦ Se conturează două intervale: 1- 2 şi 2 - B.

Pe cele două intervale, diagramele au forme simple (triunghi, respectiv triunghi) la care se cunoaşte aria şi centrul de greutate.

- ♦ Suprafețele rezultate, au ariile (Fig.3.3.2.1-2a):

Pe intervalul 1 - 2: $\Omega_1 = F\cdot a\cdot a / 2 = F\cdot a^2/2$ 3.3.2.1-1

Pe intervalul 2 - B: $\Omega_2 = F\cdot a\cdot 2a = 2\,F\cdot a^2$ 3.3.2.1-2

- ♦ Se poziționează centrele de greutate ale celor două suprafețe.
- ♦ În secțiunile corespunzătoare celor două centre de greutate, dar din diagrama m_{iV}, se calculează momentele m_{ic1}, respectiv m_{ic2} (Fig.3.3.2.1-2c), rezultând:

$$m_{ic1} = \frac{2}{3}a \qquad 3.3.2.1\text{-}3$$

$$m_{ic2} = a \qquad 3.3.2.1\text{-}4$$

- ♦ Aplicând relația 3.3.1-1 şi ținând seama de relațiile 3.3.2.1-1 ... 3.3.2.1-4, rezultă deplasarea pe verticală a secțiunii 1:

$$\delta_{1V} = \frac{\Omega_{i1}\cdot m_{ic1}}{EI} + \frac{\Omega_{i2}\cdot m_{ic2}}{EI} = \frac{7Fa^3}{3EI} \qquad 3.3.2.1\text{-}5$$

S-a obținut acelaşi rezultat, ca prin procedeul Mohr-Maxwell.

Pentru calculul deplasării pe orizontală a secțiunii 1, procedăm astfel:

- ♦ Pe cadrul neîncărcat (Fig.3.3.2.1-2b), punem în secțiunea 1 pe orizontală, o forță concentrată unitară (Fig.3.3.2.1-2d).
- ♦ Pentru acest sistem, se trasează diagrama de momente m_{iH} (Fig.3.3.2.1-2d).
- ♦ Intervalele caracteristice se păstrează, la fel şi suprafețele elementare ale diagramei M_i.
- ♦ Rezultă ariile suprafețelor elementare:

$$\Omega_{i1} = \frac{1}{2} \cdot Fa \cdot a = \frac{Fa^2}{2} \qquad 3.3.2.1\text{-}6$$

$$\Omega_{i2} = 2Fa^2 \qquad 3.3.2.1\text{-}7$$

- ♦ Valoarea momentelor citite în diagrama m_{iH}, din secțiunile aflate în dreptul centrelor de greutate ale suprafețelor elementare, sunt:

$$m_{ic1} = 0 \qquad 3.3.2.1\text{-}8$$

$$m_{ic2} = a \qquad 3.3.2.1\text{-}9$$

- ♦ Aplicând relația 3.3.1-1 şi ținând seama de relațiile 3.3.2.1-6 ... 3.3.2.1-9, rezultă deplasarea pe orizontală a secțiunii 1:

$$\delta_{1H} = \frac{\frac{1}{2} \cdot Fa^2 \cdot 0}{EI} + \frac{2Fa^2 \cdot a}{EI} = \frac{2Fa^3}{EI} \qquad 3.3.2.1\text{-}10$$

acelaşi rezultat ca prin procedeul Mohr-Maxwell.

Cu deplasările δ_{1V} şi δ_{1H}, se determină deplasarea totală a secțiunii 1:

$$\delta_1 = \sqrt{\delta_{1V}^2 + \delta_{1H}^2} = \frac{\sqrt{85} \cdot Fa^3}{EI} \qquad 3.3.2.1\text{-}11$$

b) Se calculează acum rotirea secțiunii 1.

- Se încarcă cadrul din Fig.3.3.2.1-2b cu un moment concentrat unitar, în secțiunea 2 şi se trasează diagrama de moment încovoietor m'_i (Fig.3.3.2.1-2e).
- Se păstrează suprafețele, rezultând ariile:

$$\Omega_{i1} = \frac{Fa^2}{2} \qquad 3.3.2.1\text{-}12$$

$$\Omega_{i2} = 2Fa^2 \qquad 3.3.2.1\text{-}13$$

- Momentele din secțiunile corespunzătoare centrelor de greutate ale suprafețelor, dar citite în diagrama m'_i, sunt (Fig.3.3.2.1.2e):

$$m'_{ic1} = 0 \qquad 3.3.2.1\text{-}14$$

$$m'_{ic2} = -1 \qquad 3.3.2.1\text{-}15$$

Aici, m'_{ic2} este negativ, deoarece întide fibrele opuse față de cum întind sarcinile aplicate (adică forța F). Forța F întinde fibrele din stânga (Fig.3.3.2.1-2a), iar momentul unitar, întinde fibrele din partea dreaptă (Fig.3.3.2.1-2e). Este firesc atunci ca ele să fie de semne contrare.

- Cu relațiile 3.3.2.1-12 ... 3.3.2.1-15, se calculează rotirea secțiunii 2:

$$\varphi_2 = \frac{\frac{Fa^2}{2} \cdot 0}{EI} + \frac{2Fa^2(-1)}{EI} = -\frac{2Fa^2}{EI} \qquad 3.3.2.1\text{-}16$$

S-a obținut acelaşi rezultat ca în cazul utilizării procedeului Mohr-Maxwell. Din acest exemplu, se poate trage concluzia că cele

două procedee (Mohr-Maxwell, respectiv Veresceaghin), conduc la acelaşi rezultat.

Rezolvitorul are dreptul să-şi aleagă procedeul pe care-l doreşte, însă trebuie avut grijă de restricțiile impuse de procedeul Veresceaghin.

3.3.2.2 *Pentru bara din Fig.3.3.2.2-1, de rigiditate constantă, se cer:*

a) *deplasarea pe orizontală a secțiunii* 1

b) *rotirea secțiunii* 1.

Se va ține seama numai de solicitarea de încovoiere.

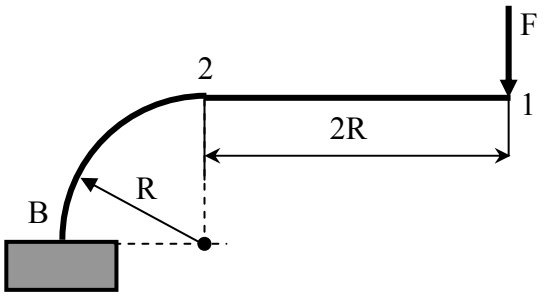


Fig.3.3.2.2-1

Rezolvare:

Se vor parcurge etapele recomandate pentru calculul deformațiilor.

După cum se poate constata, pe porțiunea curbă (intervalul 2-B) nu se poate aplica procedeul Veresceaghin. Pe acest interval se scriu funcțiile de eforturi şi se vor utiliza integrale de tip Mohr-Maxwell.

- Se trasează diagramele de eforturi sau se scriu funcțiile acestora, pentru sistemul din Fig.3.3.2.2-1, (vezi Fig.3.3.2.2-2a).

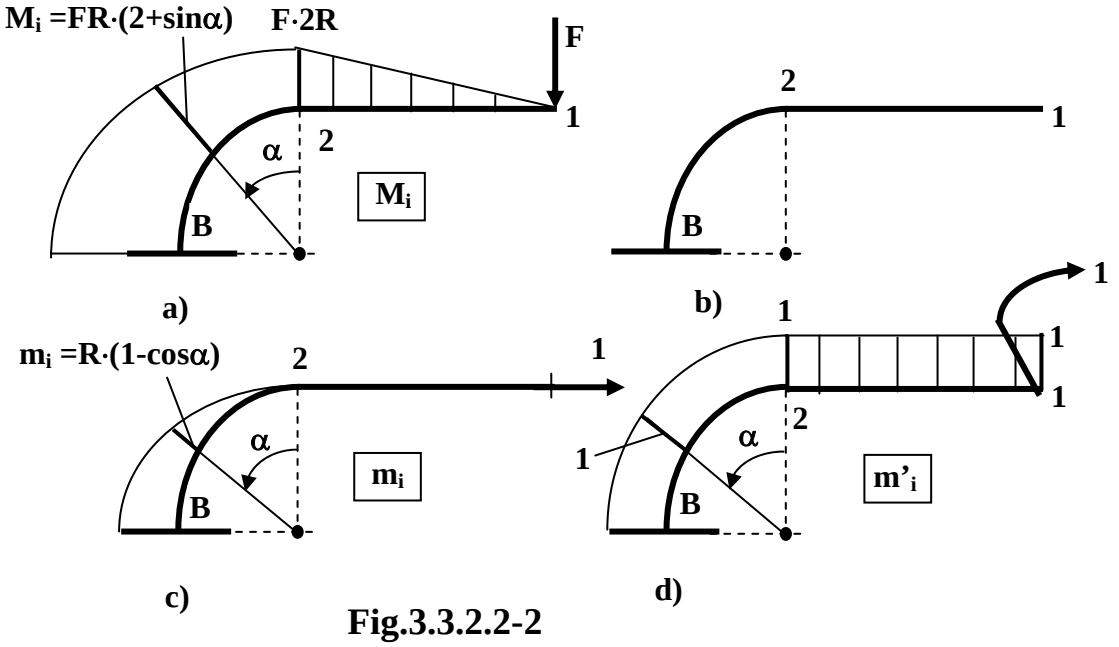


Fig.3.3.2.2-2

- Se eliberează sistemul din Fig.3.3.2.2-1 de forța F şi rezultă cadrul din Fig.3.3.2.2-2b.

a)Pentru a calcula deplasarea pe orizontală a secțiunii 1, se procedează astfel:

- Pe sistemul din Fig.3.3.2.2-2b, se pune în secțiunea 1 pe direcție orizontală o forță concentrată unitară (Fig.3.3.2.2-2c). Pentru acest sistem, pe porțiunea dreaptă se trasează diagrama de momente m_i, iar pe cea curbă, se scrie funcția de moment încovoietor. Pentru exemplul studiat, forța unitară orizontală din secțiunea 1, nu creează moment încovoietor pe porțiunea dreaptă (intervalul 1 - 2).
- Cu diagramele şi funcțiile de efort din Fig.3.3.2.2-2a, respectiv Fig.3.3.2.2-2c, se calculează deplasarea pe orizontală a secțiunii 1:

$$\delta_{1H} = \frac{\Omega_i \cdot m_{ic}}{EI} + \int_0^{\pi/2} \frac{M_i \cdot m_i}{EI} \cdot R \cdot d\alpha = \frac{\frac{1}{2} \cdot FR \cdot 2R \cdot 0}{EI} +$$

$$+\int_0^{\pi/2}\frac{FR\cdot(2+\sin\alpha)\cdot R\cdot(1-\cos\alpha)}{EI}\cdot R\cdot d\alpha=\frac{2\pi-1}{2}\cdot\frac{FR^3}{EI} \qquad 3.3.2.2\text{-}1$$

b) Pentru calculul rotirii secțiunii 1, se încarcă sistemul din Fig.3.3.2.2-2b cu un moment încovoietor unitar concentrat în secțiunea 1 (Fig.3.3.2.2-2d).

- Pentru acest sistem, pe porțiunea dreaptă a barei, se trasează diagrama de moment încovoietor, iar pe cea curbă, se scrie funcția acestuia (Fig.3.3.2.2-2d).
- În Fig.3.3.2.2-2a se poziționează centrul de greutate al suprafeței diagramei de moment încovoietor M_i şi se calculează aria acestei suprafețe:

$$\Omega_{i1}=\frac{1}{2}\cdot F\cdot 2R\cdot 2R=2FR^2 \qquad 3.3.2.2\text{-}2$$

- În diagrama m'_i din Fig.3.3.2.2-2d, se calculează valoarea m'_{ic} din secțiunea corespunzătoare centrului de greutate al suprafeței M_i:

$$m'_{ic}=1 \qquad 3.3.2.2\text{-}3$$

- Cu relațiile 3.3.2.2-2, 3.3.2.2-3 şi cu funcțiile de efort de pe porțiunea curbă, se calculează rotirea secțiunii 1:

$$\varphi_1=\frac{\Omega_{i1}\cdot m'_{ic}}{EI}+\int_0^{\pi/2}\frac{M_i\cdot m'_{ic}}{EI}\cdot R\cdot d\alpha=\frac{2FR^2\cdot 1}{EI}+$$

$$+\int_0^{\pi/2}\frac{FR(2+\sin\alpha)\cdot 1}{EI}\cdot R\cdot d\alpha=(\pi+3)\cdot\frac{FR^2}{EI} \qquad 3.3.2.2\text{-}4$$

3.3.2.3 *Pentru bara cotită şi cu secțiune constantă din Fig.3.3.2.3-1, se cer:*

a) *deplasarea pe orizontală a secțiunii* 2

b) *rotirea secțiunii* 3.

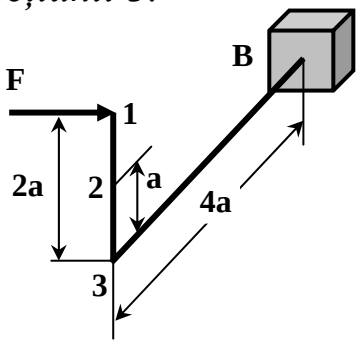


Fig.3.3.2.3-1

Rezolvare:

Bara având numai porțiuni drepte, se utilizează procedeul Veresceaghin.

- Se trasează diagramele de eforturi M_i şi M_t (N şi T se neglijează) pentru sistemul din Fig.3.3.2.3-1. Aceste diagrame sunt prezentate în Fig.3.3.2.3-2a.
- Se eliberează sistemul dat de toate sarcinile aplicate (Fig.3.3.2.3-2b).

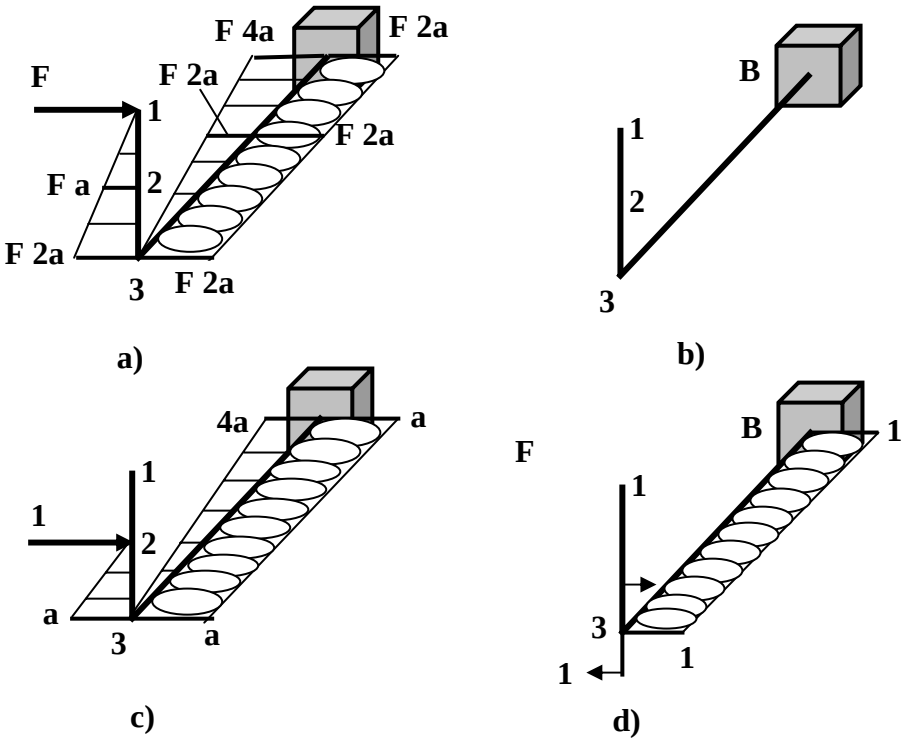


Fig.3.3.2.3-2

a) Pentru calculul deplasării pe orizontală a secțiunii 2, pe sistemul neîncărcat (Fig.3.3.2.3-2b), în secțiunea 2, se pune pe orizontală o forță concentrată unitară (Fig.3.3.2.3-2c).

- În Fig.3.3.2.3-2a, se delimitează suprafețele de arii Ω. Pe intervalul 2 - 3, suprafața fiind un trapez, aceasta se descompune în două suprafețe: una dreptunghiulară şi cealaltă triunghiulară. Pe ambele intervale, ariile suprafețelor sunt cunoscute, la fel şi poziția centrelor de greutate ale acestor suprafețe (Fig.3.3.2.3-2a).

  Rezultă:

Pe intervalul 1-2: $\Omega_{i0} = \frac{1}{2} \cdot Fa \cdot a = \frac{Fa^2}{2}$ 3.3.2.3-1

Pe intervalul 2-3: $\Omega_{i1} = Fa \cdot a = Fa^2$ 3.3.2.3-2

$$\Omega_{i2} = \frac{1}{2}(2Fa - Fa) \cdot a = \frac{Fa^2}{2}$$ 3.3.2.3-3

Pe intervalul 3-B: $\Omega_{i3} = \frac{1}{2} \cdot F4a \cdot 4a = 8Fa^2$ 3.3.2.3-4

$$\Omega_{i4} = F2a \cdot 4a = 8Fa^2$$ 3.3.2.3-5

- Corespunzător poziției centrelor de greutate ale acestor suprafețe, din diagrama m_i prezentată în Fig.3.3.2.3-2c, rezultă valoarea momentelor:

Pe intervalul 1-2: $m_{c0} = 0$ 3.3.2.3-6

Pe intervalul 2-3: $m_{c1} = \frac{1 \cdot a}{2} = \frac{a}{2}$ 3.3.2.3-7

$$m_{c2} = \frac{2}{3} \cdot a$$ 3.3.2.3-8

Pe intervalul 3-B: $m_{c3} = \frac{2}{3} \cdot 4a = \frac{8a}{3}$ 3.3.2.3-9

$m_{c4} = a$ 3.3.2.3-10

- Pe baza relațiilor 3.3.2.3-1...3.3.2.3-10 se poate calcula deplasarea pe orizontală a secțiunii 2:

$$\delta_{2H} = \frac{\Omega_{i0} \cdot m_{c0}}{EI} + \frac{\Omega_{i1} \cdot m_{c1}}{EI} + \frac{\Omega_{i2} \cdot m_{c2}}{EI} + \frac{\Omega_{i3} \cdot m_{c3}}{EI} + \frac{\Omega_{i4} \cdot m_{c4}}{GI_p} =$$

$$= \frac{133 \cdot Fa^3}{EI} + \frac{8Fa^3}{GI_p} \qquad 3.3.2.3\text{-}11$$

Pentru oțel G = 2E/5, iar în cazul secțiunilor circulare $I_p = 2I_z$. Cu aceste considerații, relația 3.3.2.3-11, conduce la:

$$\delta_{2H} = \frac{193 \cdot Fa^3}{6EI} \qquad 3.3.2.3\text{-}12$$

b) Pentru calculul rotirii secțiunii 3, pe sistemul din Fig.3.3.2.3-2b, în secțiunea 3 se pune un moment concentrat unitar (Fig.3.3.2.3-2d).

- Pentru acest sistem, se trasează diagramele de momente (Fig.3.3.2.3-2d). Rezultă numai diagramă de moment de torsiune. Cum pe intervalul 3-B nu există diagrame de moment încovoietor, rezultă că pe acest interval, în relația de calcul a rotirii, nu apar termeni corespunzători acestei solicitări.
- Calculul rotirii secțiunii 3, se face atunci cu relația:

$$\varphi_3 = \frac{\Omega_{i4} \cdot m'_{c4}}{GI_p} = \frac{8Fa^2 \cdot 1}{\frac{2}{5} \cdot E \cdot 2I} = \frac{10Fa^2}{EI} \qquad 3.3.2.3\text{-}13$$

Atenție: În cazul solicitării de torsiune, rigiditatea barei este GI_t (pentru secțiuni circulare, GI_p).

3.4 Sisteme static nederminate, rezolvate prin metoda sarcinii unitare

3.4.1 *Considerații generale. Etape de calcul. Simetrii şi antisimetrii în sisteme static nedeterminate*

Rezolvarea sistemelor static nedeterminate, presupune în primul rând ridicarea nedeterminării, adică determinarea unor necunoscute, astfel încât după cunoaşterea acestora, sistemul să devină static determinat.

Un cadru este *static nedeterminat exterior* (Fig,3.4.1-1a), atunci când numărul necunoscutelor din reazeme este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru care se pot scrie pentru acel cadru. În acest caz, gradul de nedeterminare, este dat de diferența dintre numărul necunoscutelor şi cel al ecuațiilor de echilibru care se pot scrie.

Un sistem este *static nedeterminat interior* (Fig.3.4.1-1b), dacă el este un sistem închis, fără reazeme. La un astfel de contur închis (în plan), se poate face o secțiune oarecare, în care se introduc eforturile N, T, M_i (Fig.3.4.1-1c), care nu pot fi determinate din ecuațiile de echilibru exterior. Rezultă că un sistem plan închis, este triplu static nedeterminat.

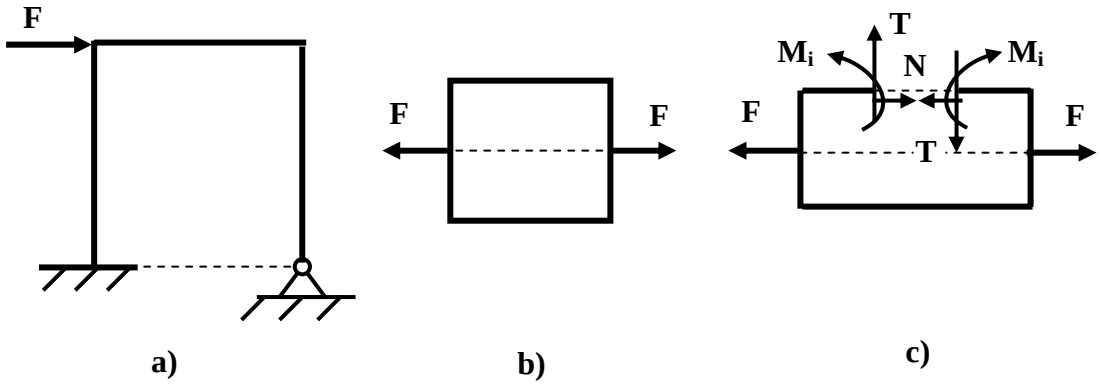


Fig.3.4.1-1

Se poate afirma că, la un cadru plan, gradul de nedeterminare este egal cu numărul necunoscutelor din reazeme plus de trei ori numărul contururilor închise, minus trei (numărul ecuațiilor de echilibru).

Elementele sau structurile de rezistență, pot fi şi static *nedeterminate exterior şi interior.*

Gradul de nedeterminare, se micşorează odată cu prezența articulațiilor interioare. Astfel, pentru cadrul din Fig.3.4.1-2a, există o articulație care leagă două bare. Dacă se secționează conturul închis chiar în articulație, acolo momentul încovoietor este nul şi rămân numai două necunoscute. Ca urmare, acest cadru este numai de cinci ori static nedeterminat. Când într-o articulație se întâlnesc trei bare (Fig.3.4.1-2b), gradul de nedeterminare scade cu 2. Cadrul din Fig.3.4.1-2b, este de patru ori static nedeterminat. În general, dacă într-o articulație concură k bare, gradul de nedeterminare al cadrului se micşorează cu k-1.

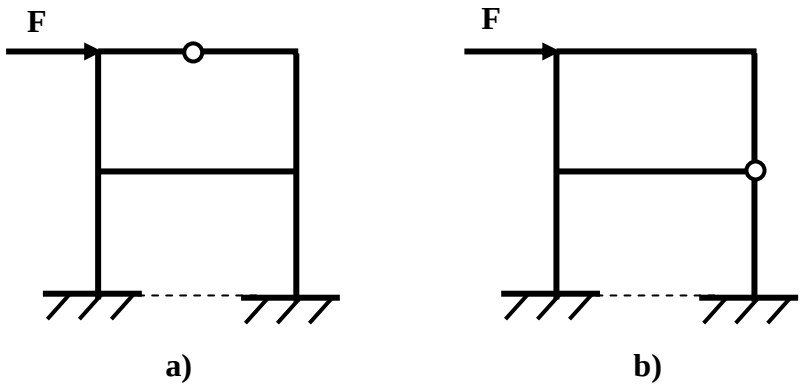


Fig.3.4.1-2

Pentru sistemele static nedeterminate, necunoscutele suplimentare se notează cu X_1, X_2, X_3, ... X_n.

Pentru cadrele relativ simple întâlnite frecvent în aplicațiile inginerului mecanic, cea mai simplă metodă de rezolvare a sistemelor static nedeterminate, este metoda eforturilor (metoda sarcinii unitare sau metoda Mohr-Maxwell), metodă prezentată la calculul deformațiilor (paragraful 3.2).

În această metodă, sistemul static nedeterminat se transformă mai întâi într-un *sistem static determinat echivalent* (notat SE) şi apoi în unul *static determinat de bază* (notat SB).

Sistemul echivalent SE, se obține din sistemul static nedeterminat dat, prin înlocuirea legăturilor exterioare suplimentare sau a celor interioare cu forțele de legătură (reacțiunile) sau cu eforturile corespunzătoare şi care se notează cu X_1, X_2, ... X_n, unde **n** este gradul de nedeterminare al sistemului inițial.

De exemplu, în locul unui reazem simplu, se introduce o singură forță; tot la fel atunci când o articulație fixă se înlocuieşte cu un reazem simplu; în locul unei articulații fixe suprimate se introduc două forțe; în locul unei încastrări se introduc două forțe şi un cuplu; la înlocuirea unei încastrări prin articulație se introduce un cuplu; la o secțiune completă într-un contur interior plan se introduc două forțe şi un cuplu; introducerea unei articulații interioare fără tăierea barei impune introducerea unui cuplu.

După cum reiese din cele prezentate, transformarea sistemului real (static nedeterminat) într-unul echivalent, se poate face în mai multe feluri. Totdeauna se va alege varianta considerată cea mai comodă pentru calcule. Problemele rezolvate ce vor urma, vor explica modul de alegere a unei anumite variante pentru sistemul echivalent.

Sistemul de bază SB, se formează din sistemul echivalent SE, prin înlăturarea de pe sistemul echivalent SE a tuturor sarcinilor aplicate şi a necunoscutelor X_1, X_2, ... X_n. Rezultă că sistemul de bază SB, este format numai din elementul de rezistență static nederminat.

Pentru rezolvarea sistemelor static nedeterminate, se parcurg următoarele **etape**:

- Se stabileşte gradul de nedeterminare **n** al sistemului real (SR).
- Se stabileşte tipul nedeterminării statice: exterior, interior sau exterior-interior.

Pentru calculul deplasărilor (liniare sau unghiulare) δ_{ii}, Δ_{i0}, se procedează în felul următor:

- Din sistemul real SR se formează sistemul echivalent SE, cel mai convenabil.
- Din SE se formează sistemul de bază SB.

- Corespunzător gradului de nedeterminare, se scrie sistemul de ecuații de condiție (spre exemplu, pentru gradul **n** de nedeterminare):

$$\delta_{11} X_1+\delta_{12} X_2+\delta_{13} X_3+ \dots +\delta_{1n} X_n+ \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} X_1+\delta_{22} X_2+\delta_{23} X_3+ \dots +\delta_{2n} X_n+ \Delta_{20} = 0 \qquad 3.4.1\text{-}1$$

.

.

.

$$\delta_{n1} X_1+\delta_{n2} X_2+\delta_{n3} X_3+ \dots +\delta_{nn} X_n+ \Delta_{n0} = 0$$

unde:

Δ_{i0} - este deplasarea pe direcția necunoscutei X_i a secțiunii în care acționează necunoscuta X_i (i = 1,2,3 ... n), produsă de sarcinile aplicate

δ_{ii} - este deplasarea pe direcția necunoscutei X_i a secțiunii în care acționează necunoscua X_i, produsă de necunoscuta $X_i = 1$.

Pentru cazul când n = 3 (gradul de nedeterminare este 3), sistemul 3.4.1-1, capătă forma:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} X_1+\delta_{22} X_2+\delta_{23} X_3+ \Delta_{20} = 0 \qquad 3.4.1\text{-}2a$$

$$\delta_{31} X_1+\delta_{32} X_2+\delta_{33} X_3+ \Delta_{30} = 0$$

Pentru cazul când n = 2 (gradul de nedeterminare este 2), sistemul 3.4.1-1, capătă forma:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{10} = 0 \qquad 3.4.1\text{-}2b$$

Pentru cazul când n = 1 (gradul de nedeterminare este 1), sistemul 3.4.1-1, capătă forma:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0 \qquad 3.4.1\text{-}2c$$

- Se ia SB şi se încarcă pe rând:
  - mai întâi cu sarcinile aplicate şi în funcție de procedeul ales (Mohr-Maxwell sau Veresceaghin) se scriu funcțiile de eforturi sau se trasează diagramele de eforturi, care se notează cu N_0, M_{i0}, M_{t0}
  - cu necunoscutele $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, ... $X_n = 1$ şi pentru fiecare astfel de încărcare, funcție de procedeul ales, se scriu funcțile de eforturi sau se trasează diagramele acestora, care se notează cu (n_1, m_{i1}, m_{t1}), (n_2, m_{i2}, m_{t2}), ... (n_n, m_{in}, m_{tn})
  - Cu N_0, M_{i0}, M_{t0} şi (n_1, m_{i1}, m_{t1}), (n_2, m_{i2}, m_{t2}), ... (n_n, m_{in}, m_{tn}) se calculează coeficienții Δ_{10}, Δ_{20}, ... Δ_{v0}, δ_{11}, δ_{12}, ... δ_{nn}. Indicii **i0**, **ij** ai acestor coeficienți, indică şi funcțiile sau diagramele care se utilizează pentru calculul coeficienților Δ_{i0}, δ_{ii}.
- Cunoscându-se deplasările Δ_{i0}, δ_{ii}, acestea se introduc în sistemul de ecuații de condiție, corespunzător gradului de nedeterminare (rel. 3.4.1-1).
- Se rezolvă sistemul de ecuații de condiție astfel obținut, rezultând necunoscutele suplimentare X_1, X_2, ... X_n.
- Pe sistemul echivalent SE, se înlocuiesc necunoscutele X_1, X_2, ... X_n cu valorile şi sensurile lor rezultate în urma calculului, obținându-se astfel un sistem real static determinat.
- Pentru sistemul static determinat obținut, se pot efectua acum calcule de rezistență sau de deformații.

Rezolvarea unui sistem cu un grad mare de nedeterminare, este o operație dificilă, datorită atât calculării unui număr mare de deplasări (coeficienți), cât şi rezolvării unui sistem liniar (rel. 3.4.1-1), care conține un număr mare de ecuații.

În aplicațiile practice din construcția de maşini, se întâlnesc sisteme cu un grad mai mic de nedeterminare. De multe ori, aceste sisteme prezintă anumite simetrii, care încă de la început, permit determinarea sau cunoaşterea unor necunoscute inițiale, fie că ele sunt nule, fie că sunt egale pe perechi. Cunoaşterea acestor necunoscute, micşorează gradul de nedeterminare al sistemului, deci se reduce numărul ecuațiilor şi bineînțeles, simplifică calculul.

Astfel, pentru un element de rezistență *plan şi simetric:*

a) *încărcat simetric,* în secțiunile cuprinse în planul de simetrie se cunoaşte efortul tăietor. Dacă în secțiunile din planul de simetrie nu există forțe tăietoare concentrate, în acele secțiuni, efortul tăietor este nul, iar dacă există o forță tăietoare concentrată, atunci aceasta se distribuie pe cele două fețe ale secțiunii, în mod egal (în valori egale).

Pentru elementele de rezistență încărcate simetric, diagramele de eforturi N şi M_i, sunt simetrice, iar diagrama T este antisimetrică față de axa de simetrie.

b) *încărcat antisimetric,* în secțiunile cuprinse în planul de simetrie, se cunosc eforturile N şi M_i. Dacă în aceste secțiuni, nu există aplicate forțe axiale concentrate sau cupluri concentrate, aici eforturile N şi M_i sunt nule. Dacă există forțe axiale şi cupluri concentrate, eforturile N şi M_i din aceste secțiuni se distribuie pe cele două fețe ale secțiunii din planul de simetrie, în mod egal.

Pentru sisteme simetrice încărcate antisimetric, diagramele de eforturi N şi M_i sunt antisimetrice iar diagrama T este simetrică față de axa de simetrie.

În concluzie, la sistemele simetrice încărcate simetric, în secțiunile cuprinse în planul de simetrie se cunoaşte efortul tăietor T, iar la sistemele simetrice încărcate antisimetric, se cunosc eforturile N şi M_i.

Sistemele simetrice încărcate simetric sau antisimetric, dau posibilitatea utilizării numai a unei jumătăți din sistem (cadru), ceea ce uşurează şi mai mult calculul.

3.4.2 *Modele de probleme rezolvate*

3.4.2.1 *Pentru cadrul plan de rigiditate constantă, din Fig.3.4.2.1-1, se cer:*

a) *ridicarea nedeterminării*

b) *deplasarea pe orizontală a secțiunii* 1.

Se va ține seama numai de efectul încovoierii.

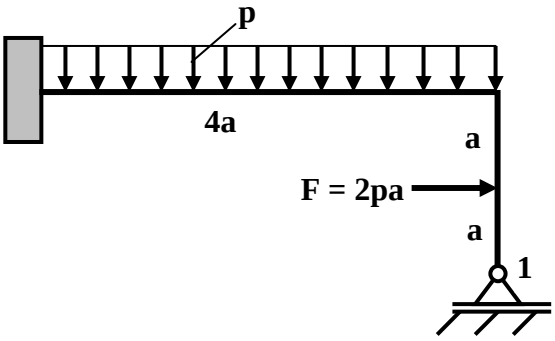


Fig.3.4.2.1-1

Rezolvare:

Se parcurg etapele recomandate.

a) Sistemul real nu are contururi închise.

- Sunt 4 reacțiuni (trei în încastrare şi una în reazemul mobil). Rezultă gradul de nedeterminare: n = 4 - 3 = 1.
- Sistemul real este o dată static nedeterminat exterior (necunoscuta suplimentară este o reacțiune).
- Se formează sistemul echivalent SE. În Fig.3.4.2.1-2 se prezintă două variante posibile ale sistemului echivalent SE, rezultate din sistemul real SR.

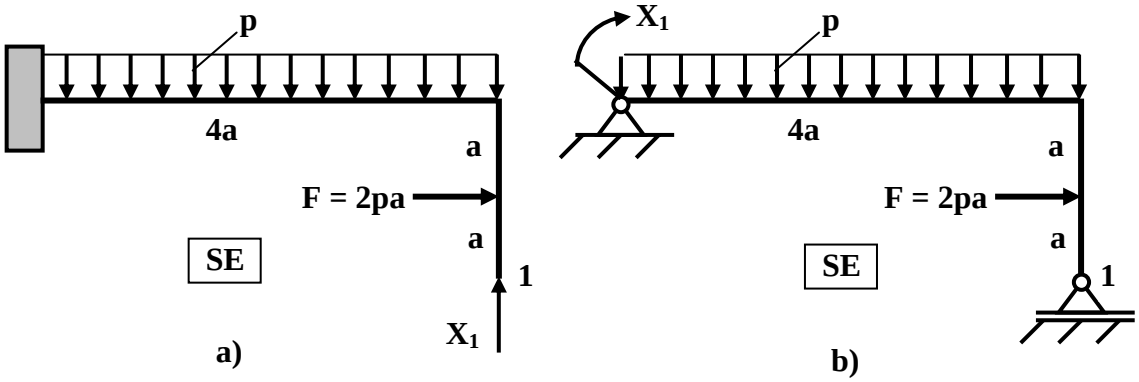


Fig.3.4.2.1-2

- Sistemul de ecuații 3.4.1-1, particularizat pentru gradul de nedeterminare n = 1, capătă forma:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{10} = 0 \qquad 3.4.2.1\text{-}1$$

de unde rezultă expresia pentru necunoscuta suplimentară X_1:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} \qquad 3.4.2.1\text{-}2$$

- Dintre cele două variante, se alege cea din Fig.3.4.2.1-2a, (Fig.3.4.2.1-3a):
- Se formează sistemul de bază SB (Fig.3.4.2.1-3b).
- Se ia SB şi se încarcă cu sarcinile aplicate (Fig.3.4.2.1-4a) şi se trasează diagrama de momente încovoietoare M_{i0} (Fig.3.4.2.1-4b).

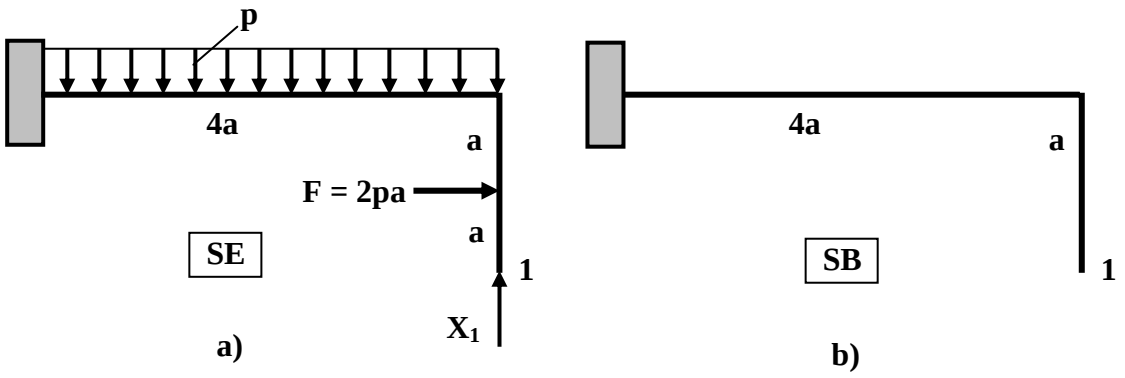
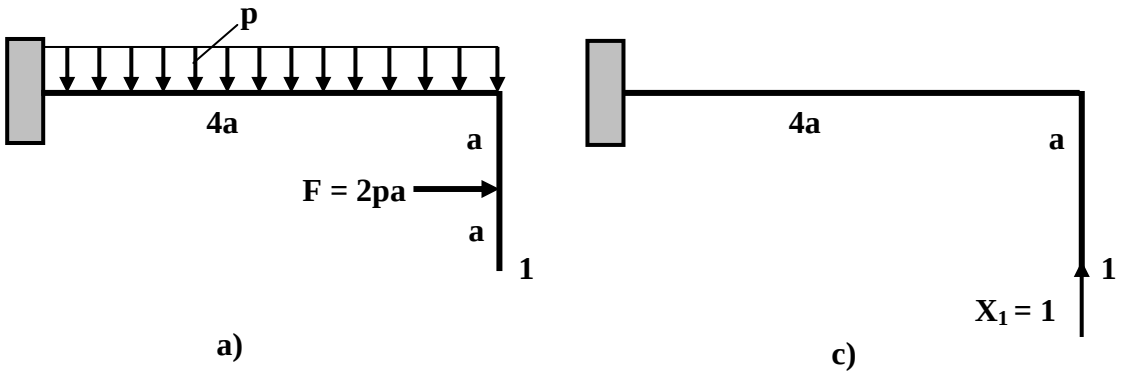


Fig.3.4.2.1-3



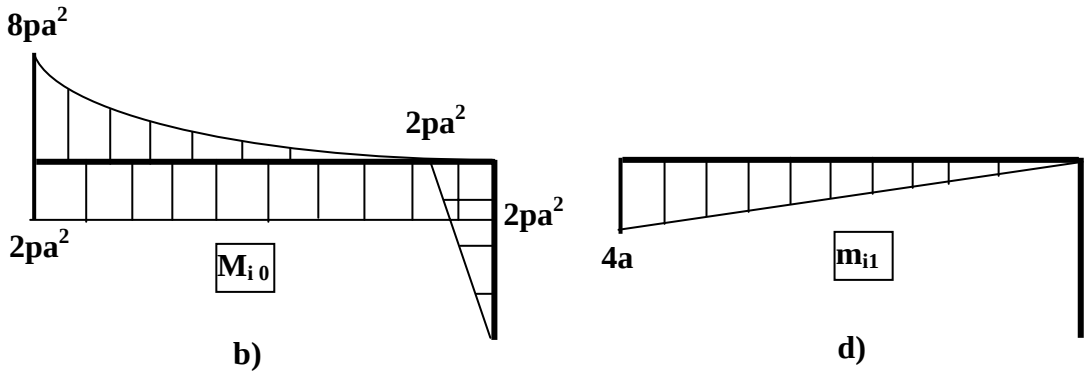


Fig.3.4.2.1-4

- Se ia SB şi se încarcă cu $X_1 = 1$ (Fig.3.4.2.1-4c) şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_{i1} (Fig.3.4.2.1-4d).
- Pentru calcule, cadrul având bare drepte, se alege procedeul Veresceaghin, motiv pentru care s-au trasat diagramele de eforturi.

Pentru calculul coeficienților Δ_{10} şi δ_{11} din relația 3.4.2.1-2, se utilizează diagramele M_{i0} şi m_{i1}. Astfel, pentru Δ_{10} se utilizează diagrama M_{i0} (de unde se ia suprafața Ω_i) şi diagrama m_{i1} (de unde se ia m_{ic}), iar pentru calculul coeficientului δ_{11} se utilizează numai diagrama m_{i1} (de aici se ia şi Ωi şi m_{ic}).

Pentru a putea înțelege cum se calculează coeficienții Δ_{10} şi δ_{11}, vă recomand să revedeți paginile din urmă unde s-a tratat calculul deformațiilor prin procedeul Veresceaghin.

- Pentru Δ_{10}, se obține:

$$\Delta_{10} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2pa^2\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 8pa^2\cdot 4a\cdot\frac{3}{4}\cdot 4a + 2pa^2\cdot 4a\cdot\frac{4a}{2}}{EI} = -\frac{16pa^4}{EI}$$

- Pentru δ_{11}, se obține:

$$\delta_{11} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 4a\cdot 4a\cdot\frac{2}{3}\cdot 4a}{EI} = \frac{64a^3}{3EI}$$

- Cu valorile obținute pentru Δ_{10} şi δ_{11}, din relația 3.4.2.1-2, rezultă X_1:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{16pa^4}{EI}}{\frac{64a^3}{3EI}} = \frac{3}{4}pa$$

- Cu valoarea lui X_1 determinată, sistemul inițial static nedeterminat, devine un sistem static determinat (Fig.3.4.2.1-5), pentru care acum se poate calcula deplasarea pe orizontală a secțiunii 1.

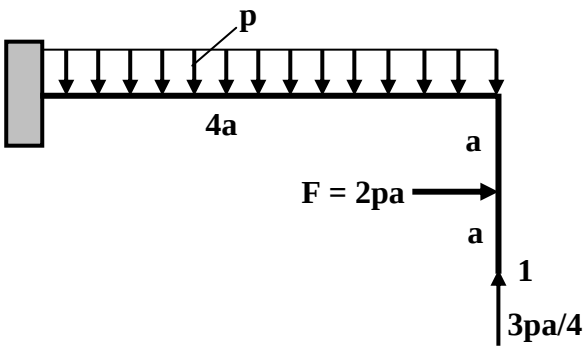


Fig.3.4.2.1-5

b) Pentru calculul deplasării pe orizontală a secțiunii 1 (pentru sistemul real din Fig.3.4.2.1-5), se parcurg etapele prezentate în paragraful 3.3. Diagramele necesare acestui calcul, sunt prezentate în Fig.3.4.2.1-6.

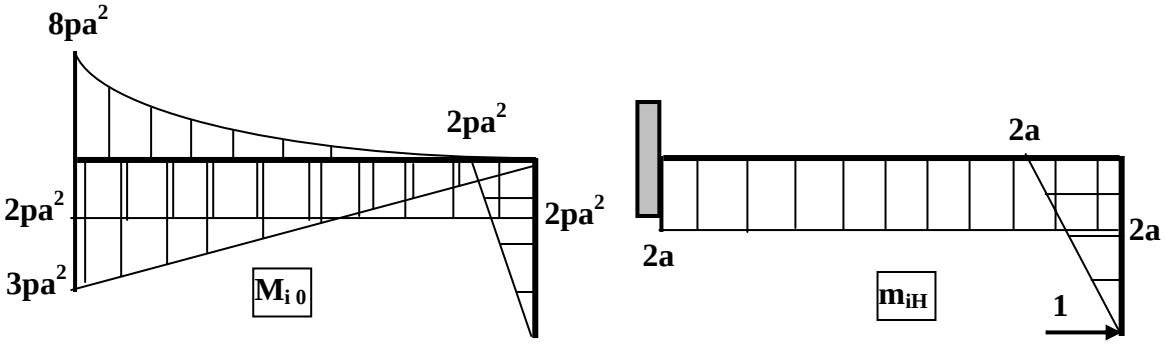


Fig.3.4.2.1-6

Se obține:

$$EI \cdot \delta_{1H} = \frac{1}{2} \cdot 2pa^2 \cdot a \cdot \left(a + \frac{2}{3} \cdot a \right) + 2pa^2 \cdot 4a \cdot 2a + \frac{1}{2} \cdot 3pa^2 \cdot 4a \cdot 2a -$$

$$-\frac{1}{3}\cdot 8pa^2\cdot 4a\cdot 2a=\frac{25}{3}\cdot pa^4$$

de unde rezultă:

$$\delta_{1H}=\frac{25pa^4}{3EI}$$

3.4.2.2 *Să se ridice nedeterminarea, pentru cadrul de rigiditate constantă, din Fig.3.4.2.2-1.*

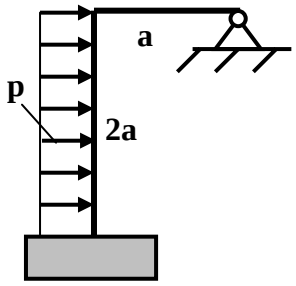


Fig.3.4.2.2-1

Rezolvare:

- Sunt 5 reacțiuni şi se pot scrie 3 ecuații de echilibru. Rezultă gradul de nedeterminare: n = 5 - 3 = 2.
- Sistemul este static nedeterminat exterior de 2 ori.
- Se formează sistemul echivalent SE. În Fig.3.4.2.2-2, se prezintă mai multe variante ale sistemului echivalent.
- Corepunzător lui n = 2, sistemul de ecuații de condiții, are forma:

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\Delta_{10}&=0\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\Delta_{20}&=0\end{aligned}\qquad 3.4.2.2\text{-}1$$

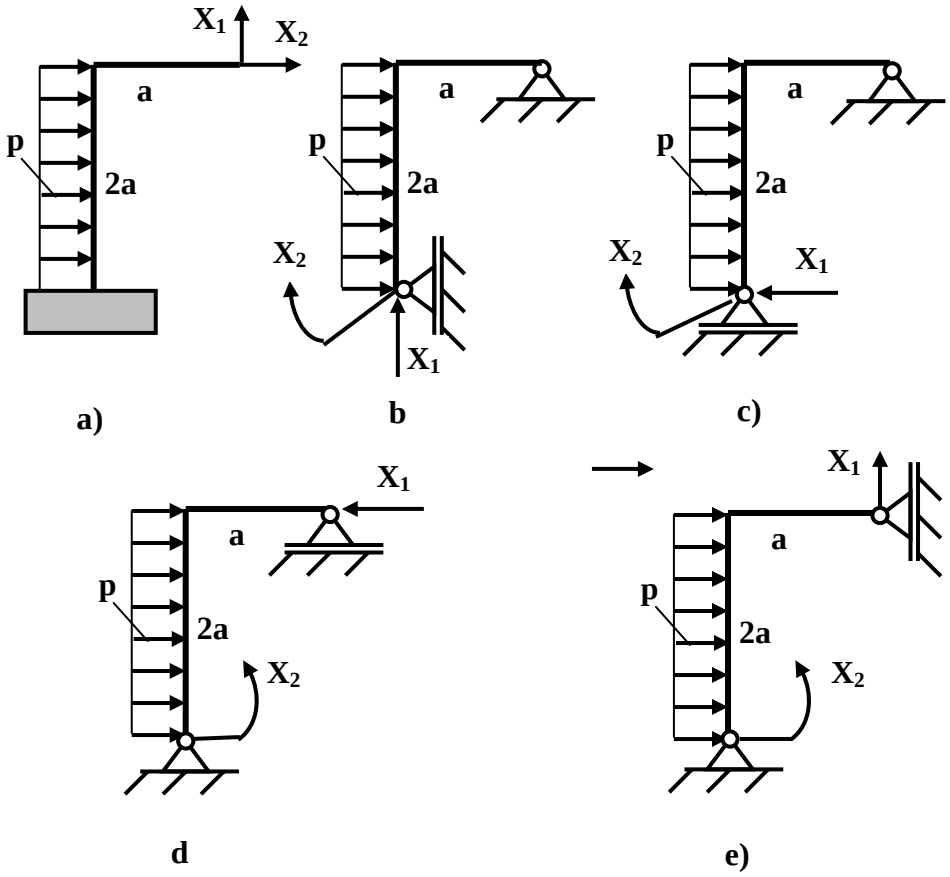


Fig.3.4.2.2-2

♦ Pentru ridicarea nedeterminării, se alege varianta din Fig.3.4.2.2-2a, deoarece pentru această variantă, diagramele de eforturi se trasează cel mai uşor (Fig.3.4.2.2-3a).

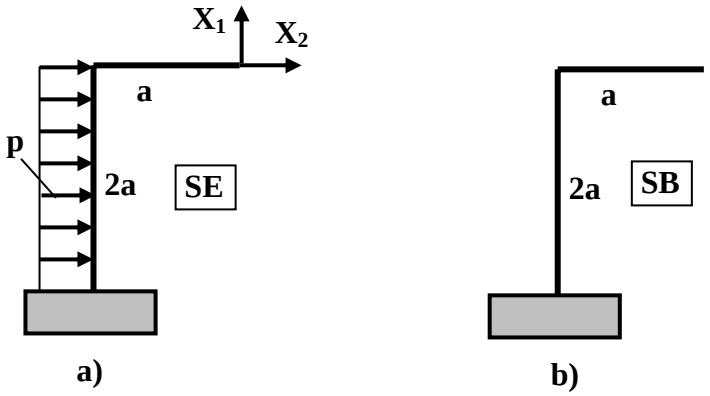


Fig.3.4.2.2-3

♦ Sistemul de bază SB, este prezentat în Fig.3.4.2.2-3b.

- Se încarcă sistemul de bază SB cu sarcina aplicată p (Fig.3.4.2.2.-4a) şi se trasează diagrama de momente M_{i0} (Fig.3.4.2.2-4b).
- Se încarcă sistemul de bază SB, pe rând cu $X_1 = 1$ (Fig.3.4.2.2-4c) şi $X_2 = 1$ (Fig.2.3.2.2-4d) şi se trasează diagramele de momente încovoietoare m_{i1} (Fig.3.4.2.2-4e), respectiv m_{i2} (Fig.3.4.2.2-4f).

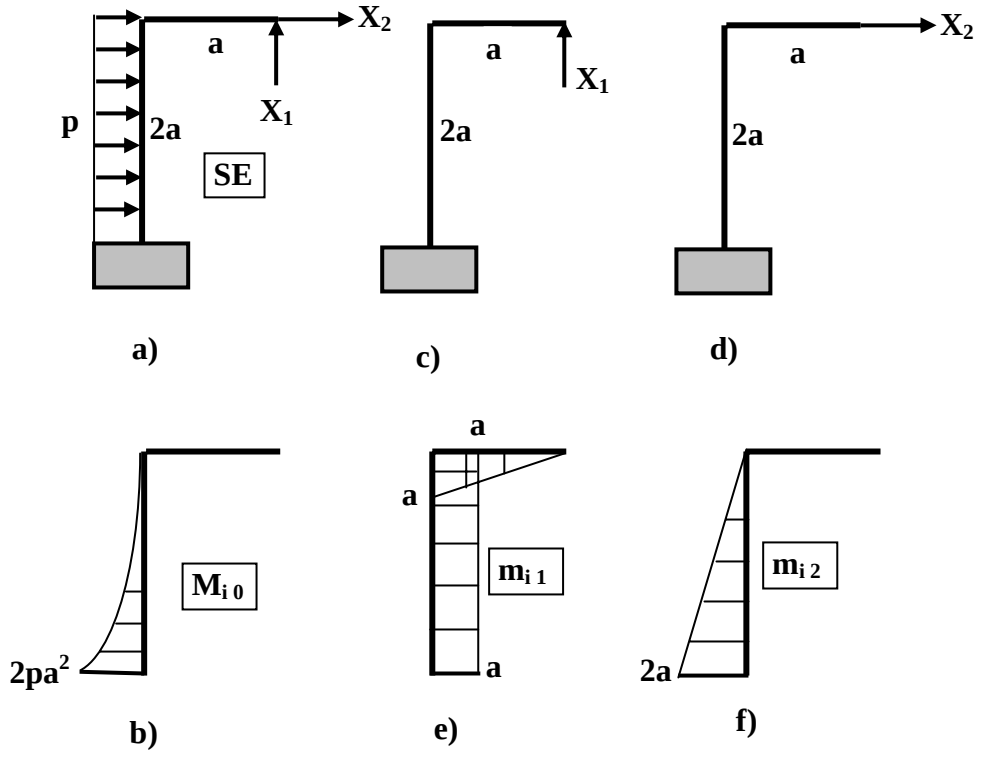


Fig.3.4.2.2-4

Coeficienții Δ_{i0} şi δ_{ii} din sistemul 3.4.2.2-1, se calculează astfel:

Δ_{10} din diagramele M_{i0} şi m_{i1}
Δ_{20} din diagramele M_{i0} şi m_{i2}
δ_{11} din diagrama m_{i1},
$\delta_{12} = \delta_{21}$ din diagramele m_{i1} şi m_{i2}
δ_{22} din diagrama m_{i2}

- Pentru coeficienții Δ_{i0} şi δ_{ii}, se obține:

$$EI \cdot \Delta_{10} = -\frac{1}{3} \cdot 2pa^2 \cdot 2a \cdot a = -\frac{4}{3} \cdot pa^4$$

$$EI \cdot \Delta_{20} = \frac{1}{3} \cdot 2pa^2 \cdot 2a \cdot \frac{3}{4} \cdot 2a = 2pa^4$$

$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + a \cdot 2a \cdot a = \frac{7}{3} \cdot a^3$$

$$EI \cdot \delta_{12} = EI \cdot \delta_{21} = -a \cdot 2a \cdot \frac{2a}{2} = -a^3$$

$$EI \cdot \delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{8}{3} a^3$$

- Cu valorile acestor coeficienți, sistemul 3.4.2.2-1, capătă forma:

$$\begin{aligned} &\frac{7a^3}{3} \cdot X_1 - 2a^3 \cdot X_2 - \frac{4}{3} \cdot pa^4 = 0 \\ &-2a^3 \cdot X_1 - \frac{8a^3}{3} \cdot X_2 + 2pa^4 = 0 \end{aligned} \qquad 3.4.2.2\text{-}2$$

- După rezolvarea sistemului 3.4.2.2-2, rezultă valoarea necunoscutelor:

$$X_1 = -\frac{1}{5} \cdot pa$$

$$X_2 = -\frac{9}{10} \cdot pa$$

- S-a obținut acum, sistemul static determinat (Fig.3.4.2.2-5):

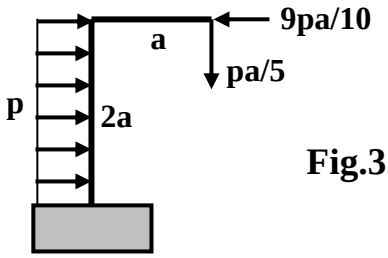


Fig.3.4.2.2-5

Pentru acest sistem, se pot efectua acum calcule de rezistență sau deformații.

3.4.2.3 *Să se ridice nedeterminarea pentru bara din Fig.3.4.2.3-1.*

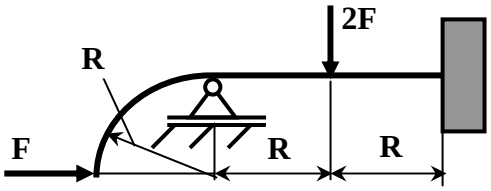


Fig.3.4.2.3-1

Rezolvare:

- Gradul de nedeterminare este: n = 4 - 3 = 1.
- Sistemul este o dată static nedeterminat exterior.
- Varianta cea mai convenabilă pentru sistemul echivalent SE este cea prezentată în Fig.3.4.2.3-2a, iar sistemul de bază pentru acest SE, este prezentat în Fig.3.4.2.3-2b.
- Sistemul de ecuații pentru gradul de nedeterminare 1, (n = 1), are forma:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{10} = 0 \qquad 3.4.2.3\text{-}1$$

de unde rezultă expresia pentru necunoscuta suplimentară X_1:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} \qquad 3.4.2.3\text{-}2$$

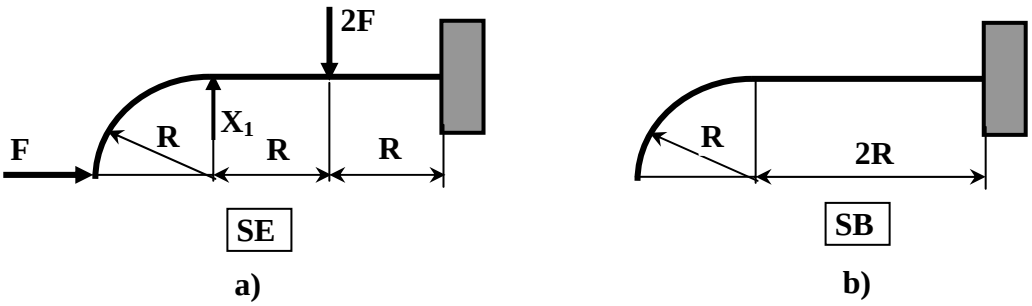


Fig.3.4.2.3-2

- Se ia sistemul de bază încărcat cu F şi 2F (Fig.3.4.2.3-3a). Pe porțiunea curbă se scrie funcția de moment încovoietor, iar pe cea dreaptă se trasează diagrama de moment încovoietor M_{i0} (Fig.3.4.2.3-3b).

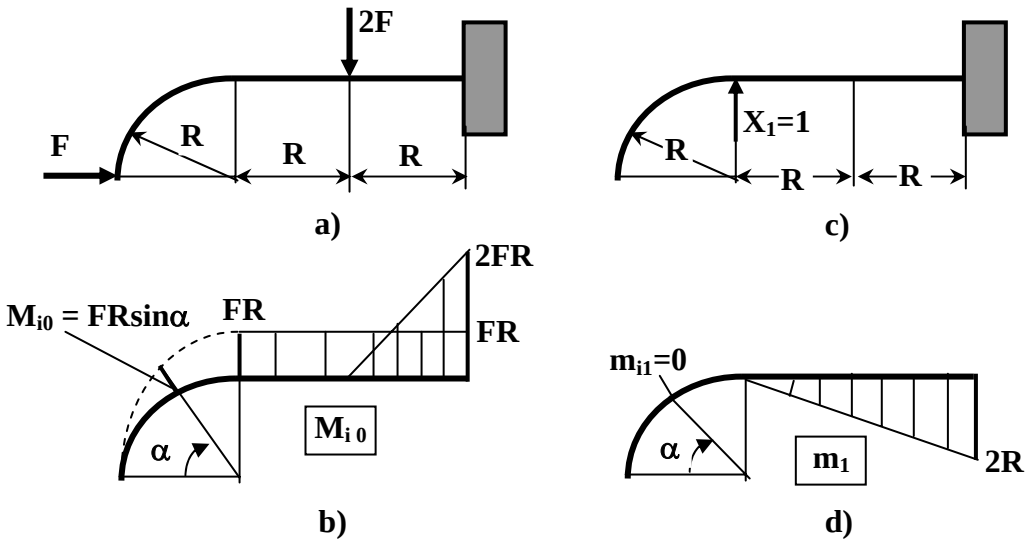


Fig.3.4.2.3-3

- Se încarcă SB cu $X_1 = 1$ (Fig.3.4.2.3-3c) şi se scrie ecuația m_{i1} sau se trasează diagrama de momente încovoietoare m_1 (Fig.3.4.2.3-3d).
- Cu M_{i0} şi m_1, se calculează coeficienții din relația 3.4.2.3-2, astfel:

  Δ_{10} cu funcțiile şi diagramele M_{i0} şi m_1

  δ_{11} cu funcțiile şi diagramele m_1

$$\Delta_{10} = \int_0^{\pi/2} \frac{FR\sin\alpha \cdot 0}{EI} \cdot R \cdot d\alpha - \frac{FR \cdot 2R \cdot \frac{2R}{2}}{EI} -$$

$$- \frac{\frac{1}{2} \cdot 2FR \cdot R \cdot \left(R + \frac{2}{3} \cdot R \right)}{EI} = -\frac{11}{3} \cdot \frac{FR^3}{EI}$$

$$\delta_{11} = \int_0^{\pi/2} \frac{0 \cdot 0}{EI} \cdot R \cdot d\alpha + \frac{\frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R \cdot \frac{2}{3} \cdot 2R}{EI} = \frac{8}{3} \cdot \frac{R^3}{EI}$$

de unde se obține:

$$X_1 = -\frac{-\dfrac{11 \cdot FR^3}{3 \cdot EI}}{\dfrac{8 \cdot R^3}{3 \cdot EI}} = \frac{11}{8} \cdot F$$

Sistemul static determinat obținut, este prezentat în Fig.3.4.2.3-4.

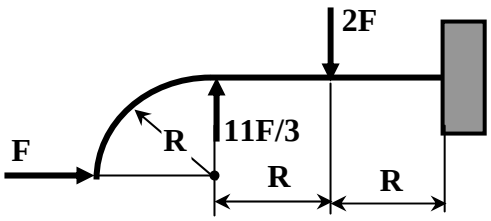


Fig.3.4.2.3-4

3.4.2.4 *Să se traseze diagramele de eforturi N şi M_i, pentru sistemul din Fig.3.4.2.4-1.*

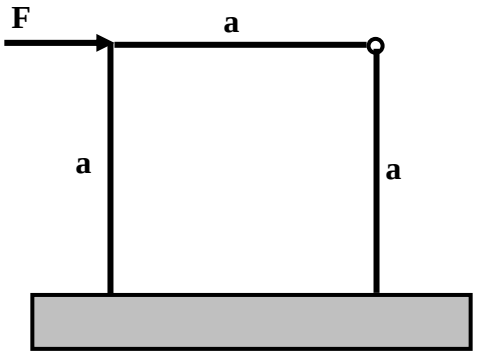


Fig.3.4.2.4-1

Rezolvare:

- Sunt 6 reacțiuni şi se pot scrie 3 ecuații de echilibru (sistemul este plan). Rezultă gradul de nedeterminare: n = 6 - 3 = 3.
- Se observă că la acest cadru, există două bare legate printr-o articulație interioară. Se ştie că această articulație interioară în care momentul încovoietor este nul, scade gradul de nedeterminare cu o unitate. Rezultă atunci că sistemul dat, este de numai două ori static nedeterminat exterior.
- Sistemul echivalent SE cel mai convenabil, este prezentat în Fig.3.4.2.4-2a, iar sistemul de bază SB rezultat din SE, în Fig.3.4.2.4-2b.

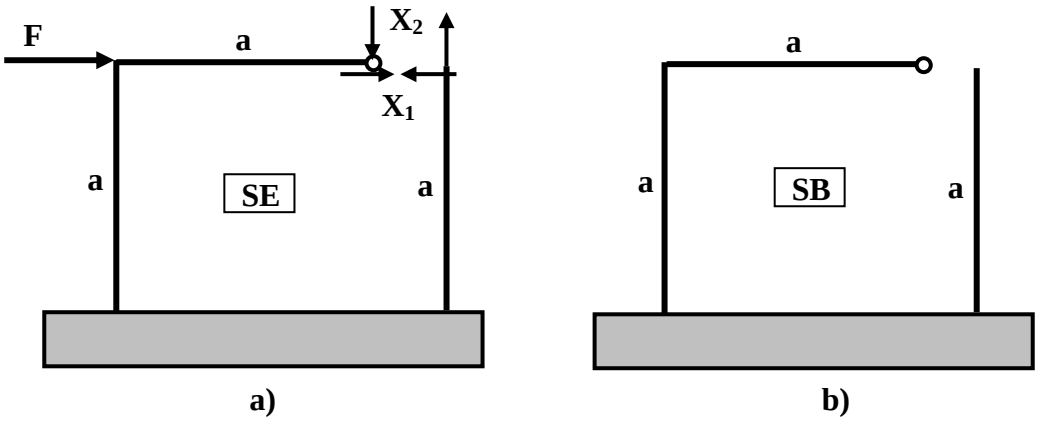


Fig.3.4.2.4-2

♦ Sistemul de ecuații de condiție, corespunzător gradului de nedeterminare n = 2, este:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{10} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{20} &= 0 \end{aligned} \qquad 3.4.2.4\text{-}1$$

♦ Se ia SB încărcat numai cu sarcina F, (Fig.3.4.2.4-3a) şi se trasează diagrama de moment încovoietor M_{i0} (Fig.3.4.2.4-3b).

♦ Se încarcă SB pe rând cu $X_1 = 1$, (Fig.3.4.2.4-3c) şi $X_2 = 1$, (Fig.3.4.2.4-3e) şi se trasează diagramele de moment încovoietor m_1 (Fig.3.4.2.4-3d), respectiv m_2 (Fig.3.4.2.4-3f).

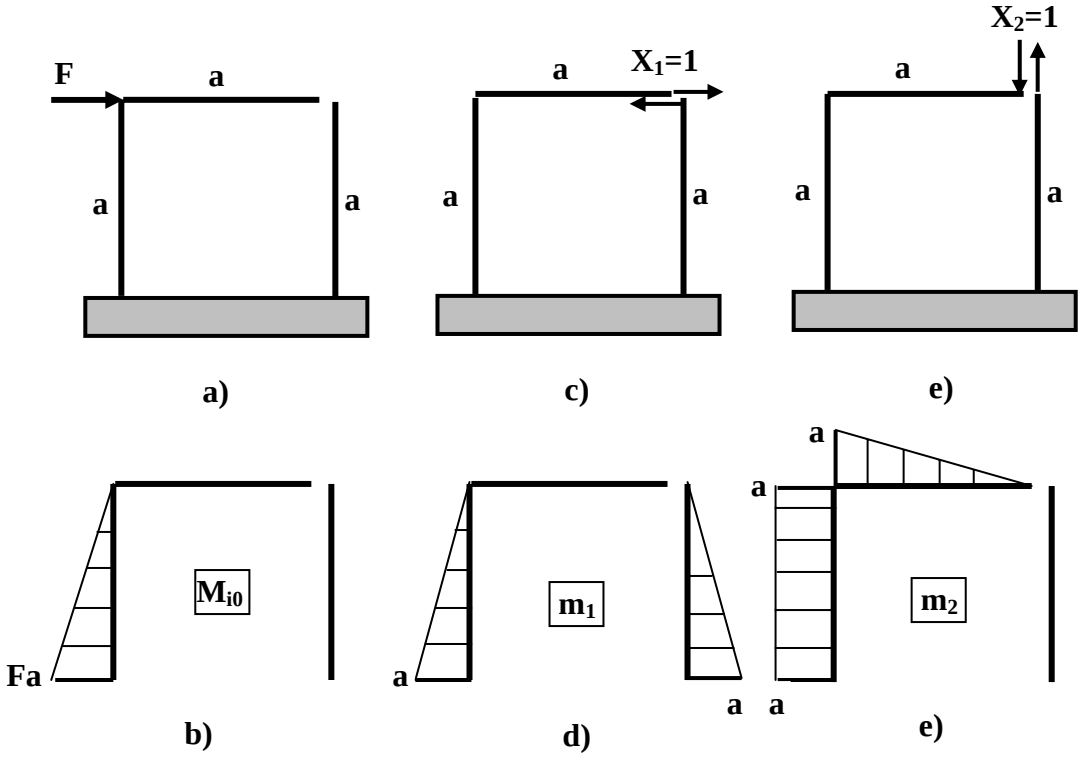


Fig.3.4.2.4-3

♦ Cu diagramele M_{i0}, m_1 şi m_2, se calculează coeficienții sistemului 3.4.2.4-1, după cum urmează:

Δ_{10} - cu digramele M_{i0} şi m_1

Δ_{20} - cu diagramele M_{i0} şi m_2
δ_{11} - cu diagrama m_1
$\delta_{12} = \delta_{21}$ - cu diagramele m_1 şi m_2
δ_{22} - cu diagrama m_2

$$EI \cdot \Delta_{10} = \frac{1}{2} \cdot Fa \cdot a \cdot \frac{2}{3} a = \frac{1}{3} Fa^3$$

$$EI \cdot \Delta_{20} = \frac{1}{2} \cdot Fa \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} Fa^3$$

$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 = \frac{2}{3} a^3$$

$$EI \cdot \delta_{12} = EI \cdot \delta_{21} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a = \frac{1}{2} a^3$$

$$EI \cdot \delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + a \cdot a \cdot a = \frac{4}{3} a^3$$

Cu aceşti coeficienți, sistemul 3.4.2.4-1, capătă forma:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} a^3 X_1 + \frac{1}{2} a^3 X_2 + \frac{1}{3} Fa^3 = 0 \\ &\frac{1}{2} a^3 X_1 + \frac{4}{3} a^3 X_2 + \frac{1}{2} Fa^3 = 0 \end{aligned} \qquad 3.4.2.4\text{-}2$$

- ♦ După rezolvarea sistemului 3.4.2.4-2, rezultă valoarea necunoscutelor suplimentare:

$$X_1 = -\frac{7}{23} \cdot F$$

$$X_2 = -\frac{6}{23} \cdot F$$

- ♦ Sistemul static determinat rezultat, este prezentat în Fig.3.4.2.4-4.

♦ Diagramele de eforturi N şi M_i, pentru cadrul static determinat din Fig.3.4.2.4-4, sunt uşor de trasat şi ele se prezintă în Fig.3.4.2.4-5.

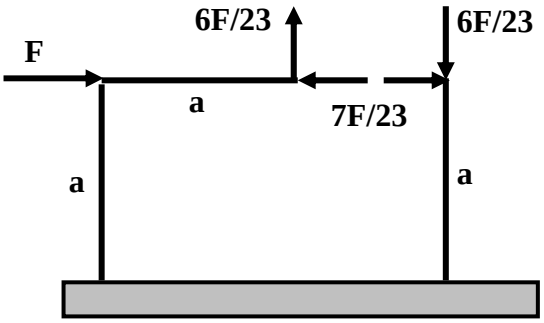


Fig.3.4.2.4-4

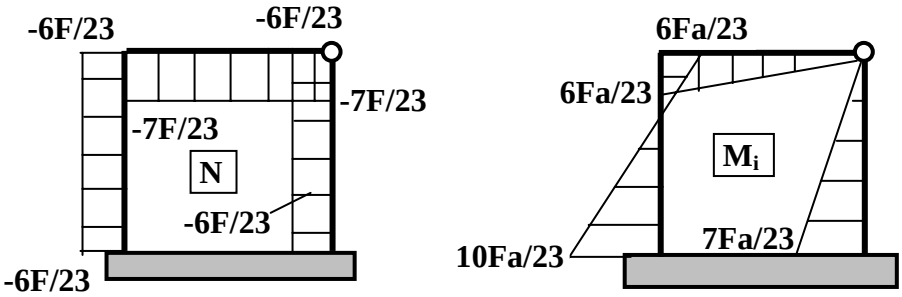


Fig.3.4.2.4-5

3.4.2.5 *Pentru cadrul din Fig.3.4.2.5-1, să se calculeze deplasarea pe verticală a secţiunii* 1.

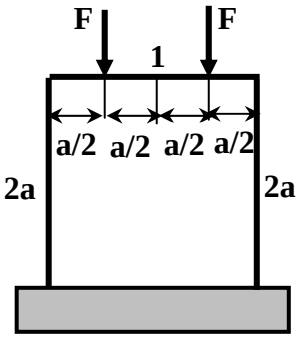


Fig.3.4.2.5-1

Rezolvare:

♦ Sistemul este static nedeterminat exterior, iar gradul de nedeterminare este : n = 6 - 3 = 3.

- Se observă că sistemul este simetric, încărcat simetric.
- Sistemul echivalent SE cel mai convenabil, este prezentat în Fig.3.4.2.5-2a, iar sistemul de bază SB, în Fig.3.4.2.5-2b.
- La sistemele simetrice încărcate simetric, în secțiunile cuprinse în planul de simetrie, este cunoscut efortul tăietor T.

Cum în această secțiune, pentru exemplul nostru, nu există o forță tăietoare concentrată, efortul tăietor T este nul. Deci, numărul necunoscutelor în secțiunea din axa de simetrie, s-a redus de la trei la două.

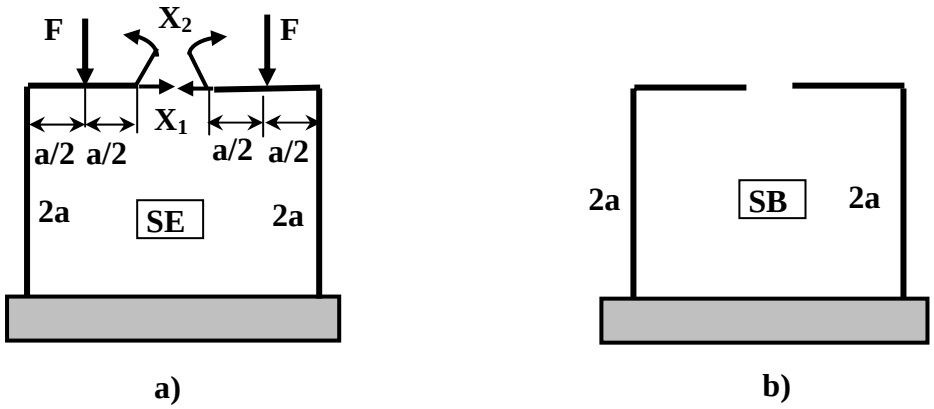


Fig.3.4.2.5-2

- Se va putea utiliza în acest caz, numai o jumătate din sistem (Fig.3.4.2.5-3a,b).

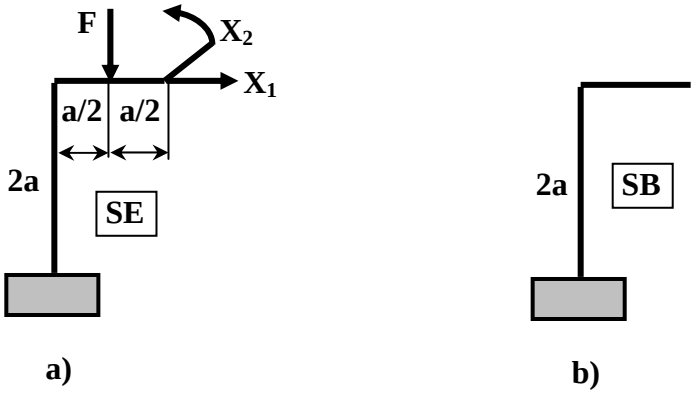


Fig.3.4.2.5-3

- Sistemul de ecuații de condiție, are forma:

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{20} = 0 \qquad 3.4.2.5\text{-}1$$

- Pentru SB încărcat numai cu forța F, (Fig.3.4.2.5-4a), se trasează diagrama de momente M_{i0}, (Fig.3.4.2.5-4b).
- Se încarcă SB pe rând cu $X_1 = 1$ (Fig.3.4.2.5-4c) şi $X_2 = 1$ (Fig.3.4.2.5-4e) şi se trasează diagramele de momente încovoietoare m_1 (Fig.3.4.2.5-4d), respectiv m_2 (Fig.3.4.2.5-4f).

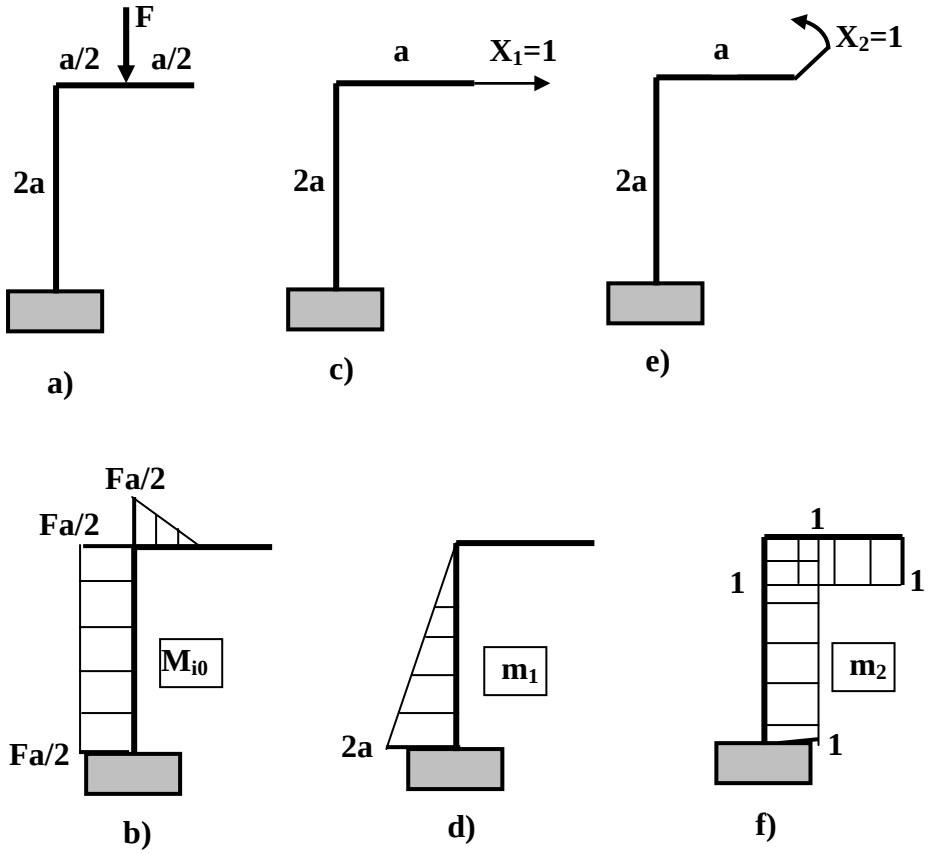


Fig.3.4.2.5-4

- Cu diagramele M_{i0}, m_1 şi m_2, se calculează coeficienții sistemului 3.4.2.5-1, astfel:

  Δ_{10} - cu diagramele M_{i0} şi m_1

  Δ_{20} - cu diagramele M_{i0} şi m_2

  δ_{11} - cu diagrama m_1

  $\delta_{12} = \delta_{21}$ - cu diagramele m_1 şi m_2

  δ_{22} - cu diagrama m_2

$$EI \cdot \Delta_{10} = \frac{1}{2} Fa \cdot 2a \cdot \frac{2a}{2} = Fa^3$$

$$EI\cdot\Delta_{20}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Fa\cdot\frac{1}{2}a\cdot 1-\frac{1}{2}Fa\cdot 2a\cdot 1==-\frac{9}{8}Fa^2$$

$$EI\cdot\delta_{11}=\frac{1}{2}2a\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}2a=\frac{8}{3}a^3$$

$$EI\cdot\delta_{12}=EI\cdot\delta_{21}=-\frac{1}{2}2a\cdot 2a\cdot 1=-2a^2$$

$$EI\cdot\delta_{22}=1\cdot a\cdot 1+1\cdot 2a\cdot 1=3a$$

- Cu valorile acestor coeficienți, sistemul 3.2.4.5-1, devine:

$$\frac{8}{3}a^3\cdot X_1-2a^2\cdot X_2+Fa^3=0$$

$$-2a^2\cdot X_1+3a\cdot X_2-\frac{9}{8}Fa^2=0 \qquad 3.4.2.5\text{-}2$$

- Rezolvarea sistemului 3.4.2.5-2, conduce la valorile:

$$X_1=-\frac{3}{16}\cdot F$$

$$X_2=\frac{1}{4}\cdot Fa$$

- Sistemul static determinat rezultat, este prezentat în Fig.3.4.2.5-5.
- Pentru acest sistem, se poate calcula deplasarea pe verticală a secțiunii 1. Diagramele M_{i0} şi m_{1V} sunt prezentate în Fig.3.4.2.5-6.

Rezultă:

$$EI\cdot\delta_{1V}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{Fa}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\right)-\frac{1}{4}Fa\cdot a\cdot\frac{a}{2}+\frac{Fa}{2}\cdot 2a\cdot a-$$

$$-\frac{1}{4}Fa\cdot 2a\cdot a-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{8}Fa\cdot 2a\cdot a=\frac{5}{48}\cdot Fa^3$$

de unde, se obține deplasarea pe vericală a secțiunii 1:

$$\delta_{1V} = \frac{5}{48} \cdot \frac{Fa^3}{EI}$$

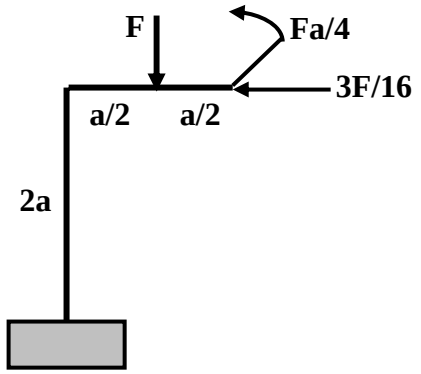


Fig.3.4.2.5

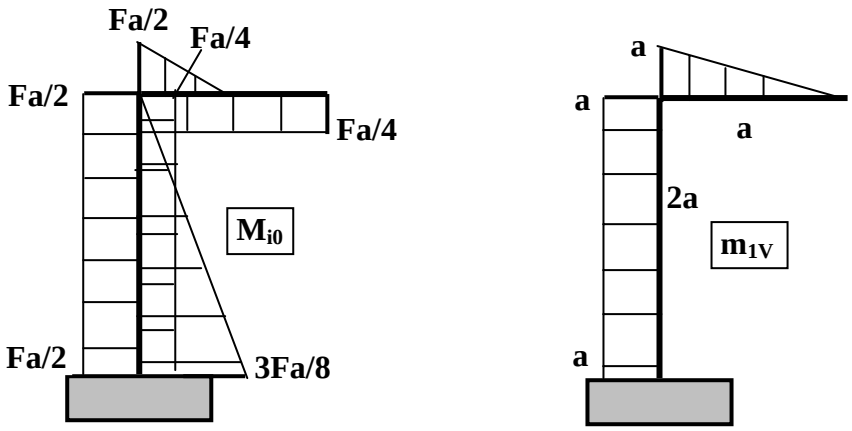


Fig.3.4.2.5-6

3.4.2.6 *Pentru cadrul din Fig.3.4.2.6-1, se cere să se traseze diagrama de momente încovoietoare.*

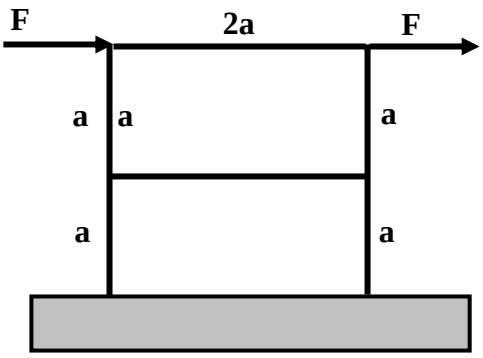


Fig.3.4.2.6-1

Rezolvare:

- Sistemul este de trei ori static nedeterminat exterior şi pentru că prezintă şi un contur închis, încă de trei ori static nedeterminat interior. Deci, gradul de nedeterminare este: n = 3 + 3 = 6.
- Se observă că sistemul este simetric încărcat antisimetric, ceea ce ne oferă posibilitatea cunoaşterii eforturilor N şi M_i în secțiunile cuprinse în planul de simetrie. Pentru acest sistem, eforturile N şi M_i din secțiunile cuprinse în planul de simetrie, sunt nule.
- Rezultă sistemul echivalent SE cel mai convenabil, cel prezentat în Fig.3.4.2.6-2a şi sistemul de bază SB în Fig.3.4.2.6-2b.

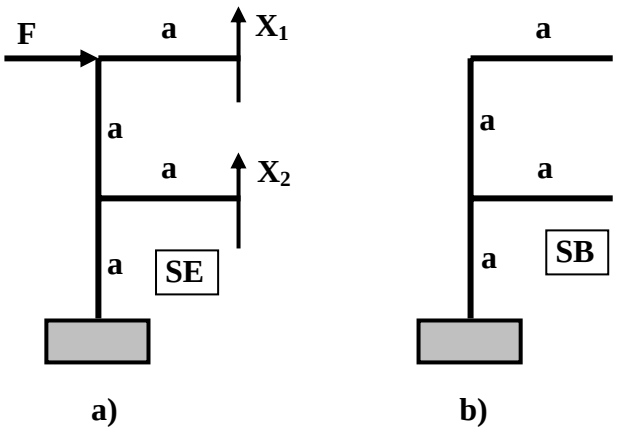


Fig.3.4.2.6-2

- Se poate constata că, numărul necunoscutelor (care inițial au fost 6) s-a redus la două şi se poate utiliza numai o jumătate din sistem, ceea ce face ca volumul de calcul să se reducă foarte mult.
- Sistemul de ecuații de condiție, pentru acest cadru, este:

$$\begin{aligned} &\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} = 0 \\ &\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} = 0 \end{aligned} \qquad 3.4.2.6\text{-}1$$

- Sistemul de bază SB se încarcă cu sarcina aplicată F, (Fig.3.4.2.6-3a) şi se trasează diagrama M_{i0}, (Fig.3.4.2.6-3b).
- Se încarcă SB pe rând cu sarcinile $X_1 = 1$, (Fig.3.4.2.6-3c), $X_2 = 1$, (Fig.3.4.2.6-3e) şi se trasează diagrama de momente încovoietoare m_1 (Fig.3.4.2.6-3d), respectiv m_2 (Fig.3.4.2.6-3f).

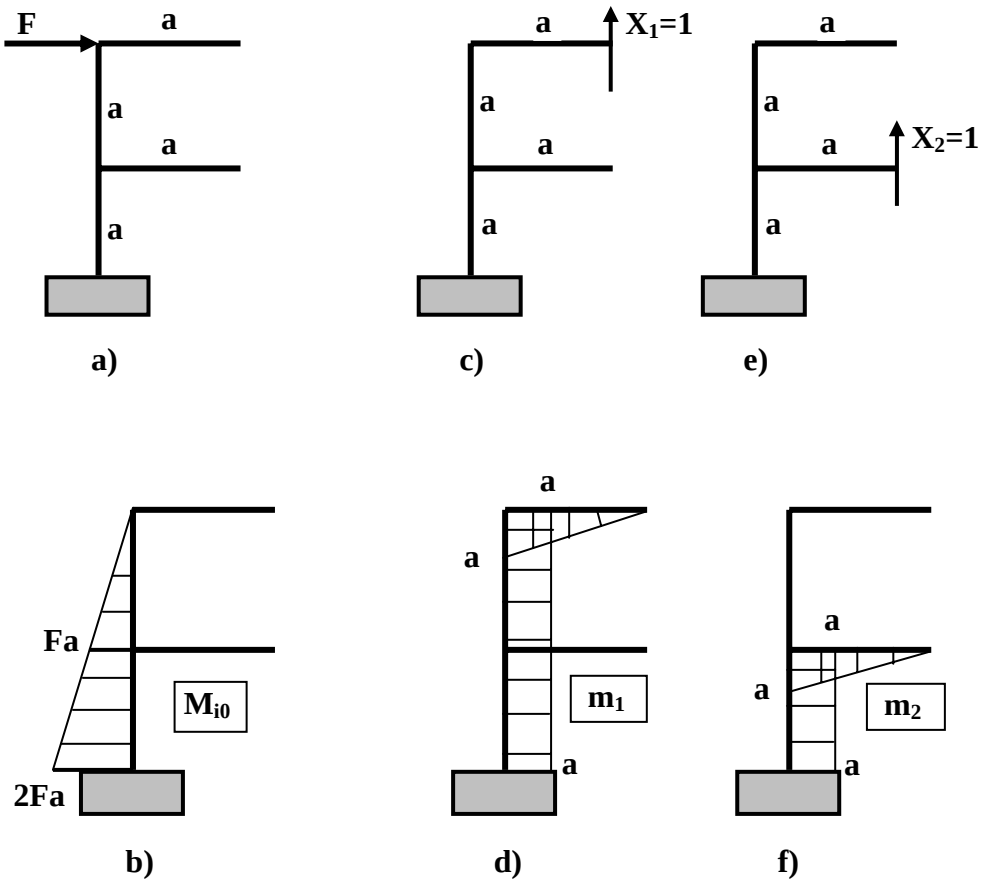


Fig.3.4.2.6-3

- Se calculează coeficienții sistemului de ecuații 3.4.2.6-1, astfel:

  Δ_{10} - cu diagramele M_{i0} şi m_1
  Δ_{20} - cu diagramele M_{i0} şi m_2
  δ_{11} - cu diagrama m_1
  $\delta_{12} = \delta_{21}$ - cu diagramele m_1 şi m_2
  δ_{22} - cu diagrama m_2

$$EI \cdot \Delta_{10} = -\frac{1}{2} \cdot 2Fa \cdot 2a \cdot a = -2Fa^3$$

$$EI \cdot \Delta_{20} = -Fa \cdot a \cdot a - \frac{1}{2} Fa \cdot a \cdot a = -\frac{3}{2} Fa^3$$

$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + a \cdot 2a \cdot a = \frac{7}{3} a^3$$

$$EI \cdot \delta_{12} = EI \cdot \delta_{21} = -a \cdot a \cdot a = -a^3$$

$$EI \cdot \delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + a \cdot a \cdot a = \frac{4}{3} a^3$$

Suprafața trapezoidală din diagrama M_{i0}, s-a descompus într-o suprafață dreptunghiulară şi una triunghiulară.

- Cu aceste valori ale coeficienților, sistemul de ecuații 3.4.2.6-1, capătă forma:

$$\begin{aligned} &\frac{7}{3} a^3 \cdot X_1 - a^3 \cdot X_2 - 2Fa^3 = 0 \\ &-a^3 \cdot X_1 + \frac{4}{3} a^3 \cdot X_2 - \frac{3}{2} Fa^3 = 0 \end{aligned} \qquad 3.4.2.6\text{-}2$$

- Rezolvarea sistemului de ecuații 3.4.2.6-2, conduce la valorile necunoscutelor suplimentare:

$$X_1 = \frac{21}{38} \cdot F = 0{,}552F$$

$$X_2 = \frac{81}{114} \cdot F = 0{,}71F$$

Diagrama de momente încovoietoare care rezultă acum după ce sistemul este static determinat (Fig.3.4.2.6-4a), este prezentată în Fig.3.4.2.6-4b.

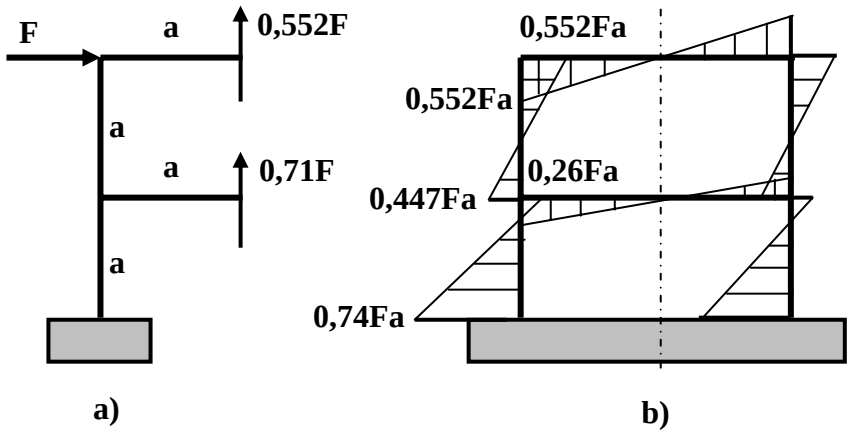


Fig.3.4.2.6-4

Pentru partea din dreapta, diagrama s-a trasat cunoscându-se că la sisteme simetrice încărcate antisimetric, eforturile N şi M_i sunt antisimetrice faţă de axa de simetrie.

3.4.2.7 *Pentru cadrul din Fig.3.4.2.7-1, să se traseze diagrama de momente încovoietoare.*

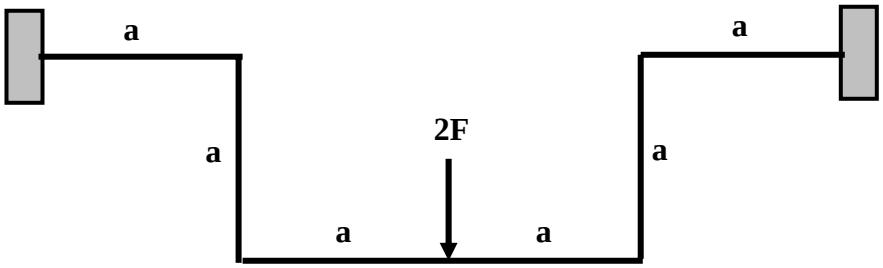


Fig.3.4.2.7-1

Rezolvare:

- Sistemul este static nedeterminat exterior. Gradul de nedeterminare este: n = 6 - 3 = 3 (6 reacțiuni, trei ecuații de echilibru).
  - După cum se constată, sistemul este simetric, încărcat simetric cu o forță concentrată aplicată chiar în secțiunea cuprinsă în planul de simetrie.
  - Sistemul echivalent SE cel mai convenabil, este prezentat în Fig.3.4.2.7-2a, iar sistemul de bază SB rezultat din SE, în Fig.3.4.2.7-2b. Sarcina 2F care acționează în secțiunea din planul de simetrie, se împarte în mod egal pe cele două fețe ale secțiunii.

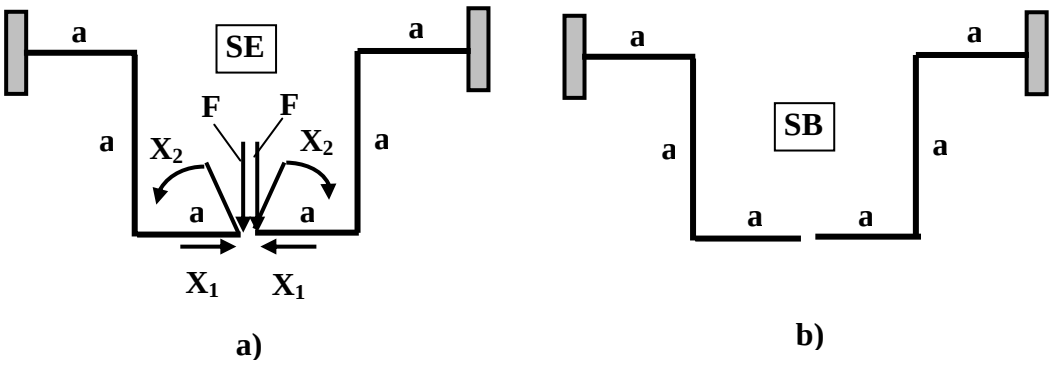


Fig.3.4.2.7-2

Numărul necunoscutelor, s-a redus în acest caz, de la trei la două şi de asemenea se va lucra în continuare, numai cu jumătate din sistem.

- Sistemul de ecuații de condiție, are forma:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{20} = 0 \qquad 3.4.2.7\text{-}1$$

- Se încarcă sistemul de bază SB, cu sarcina F, (Fig.3.4.2.7-3a) şi se trasează diagrama de moment încovoietor M_{i0}, (Fig.3.4.2.7-3b).

- Se încarcă SB pe rând cu necunoscutele $X_1 = 1$, (Fig.3.4.2.7-3c) şi $X_2 = 1$, (Fig.3.4.2.7-3e) şi se trasează diagramele de moment încovoietor m_1 (Fig.3.4.2.7-3d), respectiv diagrama m_2 (Fig.3.4.2.7-3f).

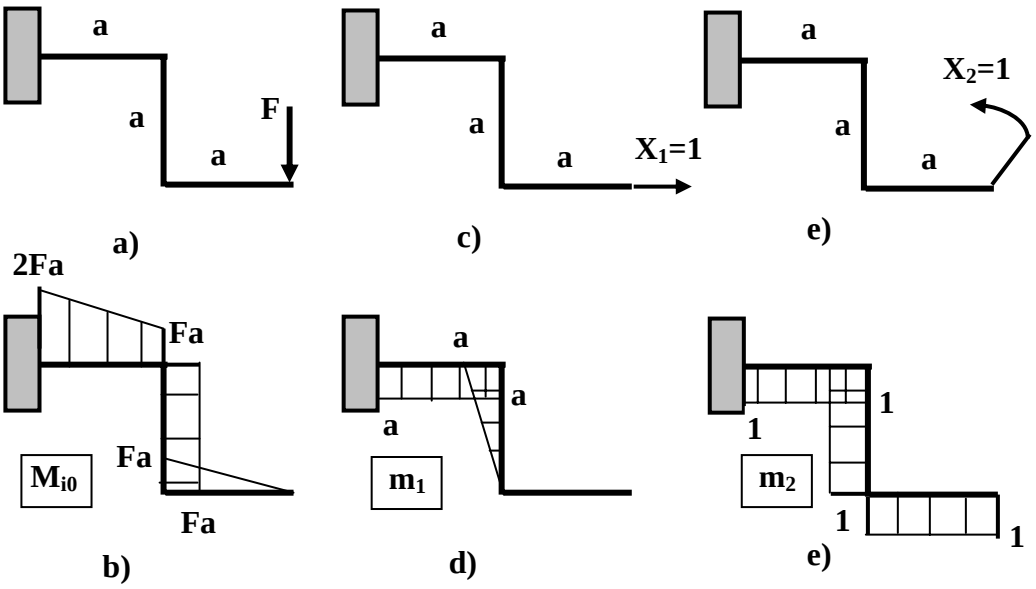


Fig.3.4.2.7-3

- Cu ajutorul diagramelor M_{i0}, m_1, şi m_2, se calculează coeficienții sistemului de ecuațiii 3.4.2.7-1, astfel:

$$EI \cdot \Delta_{10} = -Fa \cdot a \cdot \frac{a}{2} - \frac{(2Fa + Fa) \cdot a}{2} \cdot a = -2Fa^3$$

$$EI \cdot \Delta_{20} = -\frac{1}{2} Fa \cdot a \cdot 1 - Fa \cdot a \cdot 1 - \frac{(2Fa + Fa) \cdot a}{2} \cdot 1 = -3Fa^2$$

$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + a \cdot a \cdot a = \frac{4}{3} a^3$$

$$EI \cdot \delta_{12} = EI \cdot \delta_{21} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot 1 + a \cdot a \cdot 1 = \frac{3}{2} a^2$$

$$EI \cdot \delta_{22} = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot a \cdot 1 = 3a$$

- Sistemul de ecuații 3.4.2.7-1, capătă acum forma următoare:

$$\frac{4}{3}a^3 \cdot X_1 + \frac{3}{2}a^2 \cdot X_2 - 2Fa^3 = 0$$

$$\frac{3}{2}a^2 \cdot X_1 + 3a \cdot X_2 - 3Fa^2 = 0 \qquad 3.4.2.7\text{-}2$$

- ♦ După rezolvarea sistemului 3.4.2.7-2, pentru necunoscutele suplimentare se obțin valorile:

$$X_1 = \frac{6}{7} \cdot F$$

$$X_2 = \frac{4}{7} \cdot F$$

- ♦ Diagrama de moment încovoietor s-a calculat şi trasat pentru o jumătate de sistem (Fig.3.4.2.7-4a), iar pentru cealaltă jumătate s-a trasat prin simetrie (Fig.3.4.2.7-4b), ştiindu-se că la sisteme simetrice încărcate simetric, momentul încovoietor, este simetric.

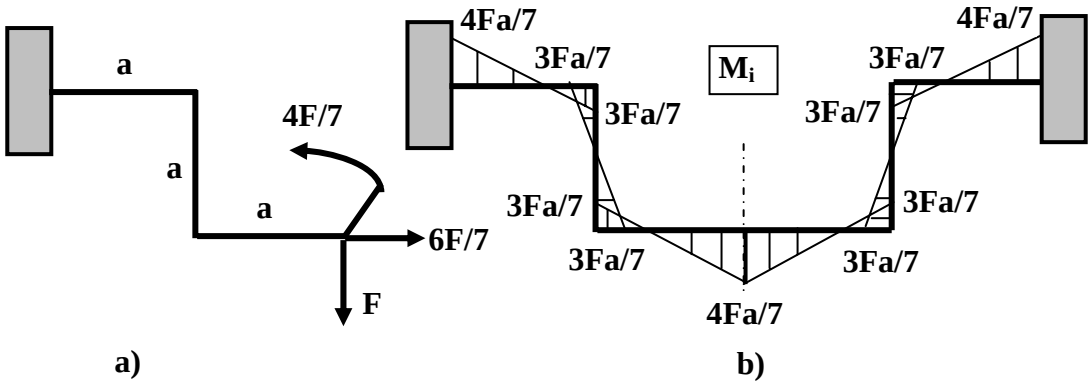


Fig.3.4.2.7-4

3.4.2.8 *Pentru sistemul din Fig.3.4.2.8-1, să se calculeze reacțiunile după montarea forțată a acestuia.*

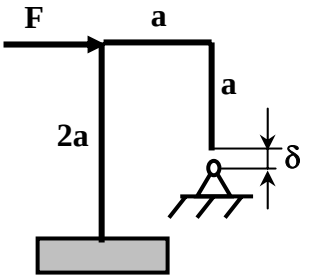


Fig.3.4.2.8-1

Rezolvare:

- După montarea forțată, sistemul din Fig.3.4.2.8-1, devine un sistem static nedeterminat exterior, ca în Fig.3.4.2.8-2.

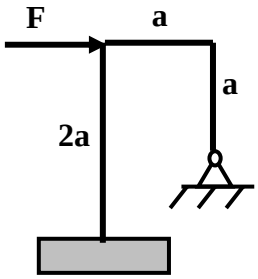


Fig.3.4.2.8-2

- Gradul de nedeterminare este n = 2, (5 reacțiuni, 3 ecuații de echilibru).
- Sistemul echivalent SE (varianta cea mai convenabilă), al sistemului real este prezentat în Fig.3.4.2.8-3a, iar sistemul de bază SB, în Fig.3.4.2.8-3b.

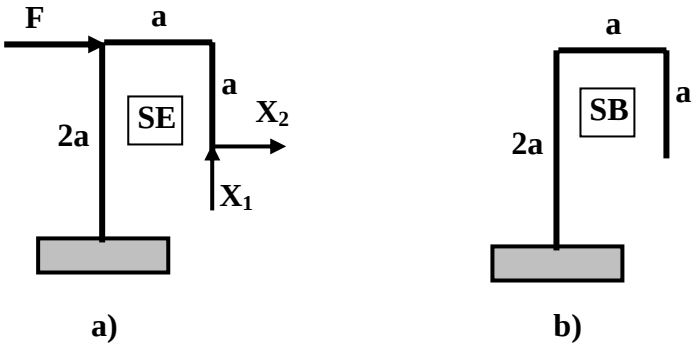


Fig.3.4.2.8-3

♦ Sistemul de ecuații, corespunzător gradului de nedeterminare n = 2, are forma următoare:

$$\begin{aligned} &\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2+\Delta_{10}=\delta \\ &\delta_{21}\cdot X_1+\delta_{22}\cdot X_2+\Delta_{20}=0 \end{aligned} \qquad 3.4.2.8\text{-}1$$

Atenție: Pe direcția verticală (direcția lui X_1), deplasarea produsă de sarcina aplicată F şi necunoscutele X_1 şi X_2, nu este nulă (ca în celelalte exemple de până acum), ci egală cu δ.

♦ Diagramele M_{i0}, m_1 şi m_2 trasate pentru acest exemplu, sunt prezentate în Fig.3.4.2.8-4.

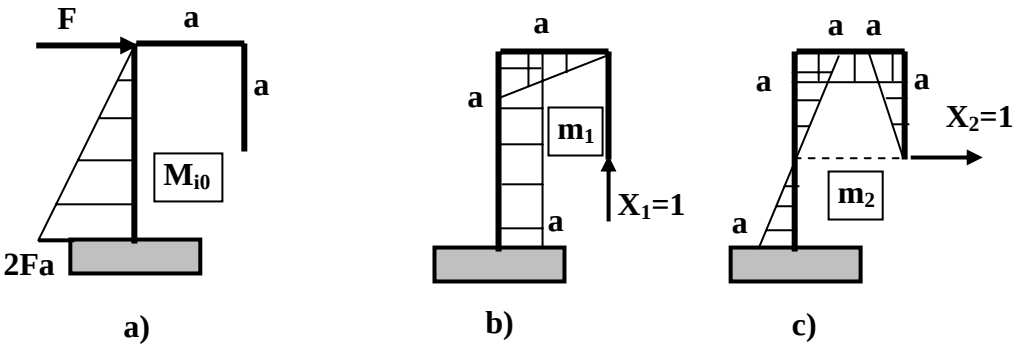


Fig.3.4.2.8-4

♦ Coeficienții sistemului de ecuații 3.4.2.8-1, sunt:

$$EI\cdot\Delta_{10}=-\frac{1}{2}\cdot 2Fa\cdot 2a\cdot a=-2Fa^3$$

$$EI\cdot\Delta_{20}=\frac{1}{2}\cdot Fa\cdot 2a\cdot\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}Fa^3$$

$$EI\cdot\delta_{11}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\frac{2}{3}a+a\cdot 2a\cdot a=\frac{7}{3}a^3$$

$$EI\cdot\delta_{21}=EI\cdot\delta_{12}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot a+a\cdot 2a\cdot 0=\frac{1}{2}a^3$$

$$EI\cdot\delta_{22}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\frac{2}{3}a+a\cdot a\cdot a+2\cdot\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\frac{2}{3}a=2a^3$$

♦ Sistemul de ecuații 3.4.2.8-1, devine:

$$14 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 = 12F + 6 \cdot \frac{\delta \cdot E \cdot I}{a^3}$$

$$3 \cdot X_1 + 12 \cdot X_2 = -2F \qquad 3.4.2.8\text{-}2$$

Rezolvarea sistemului 3.4.2.8-2, conduce la valorile:

$$X_1 = \frac{50 \cdot Fa^3 + 24 \cdot \delta \cdot E \cdot I}{53 \cdot a^3}$$

$$X_2 = -\frac{12 \cdot Fa^3 + 6 \cdot \delta \cdot E \cdot I}{53 \cdot a^3}$$

3.4.2.9 *Să se calculeze eforturile din cele trei bare ale sistemului din Fig.3.4.2.9-1. Barele au aceeaşi rigiditate:* $E_1A_1 = E_2A_2 = E_3A_3$ şi $\alpha = 45^0$.

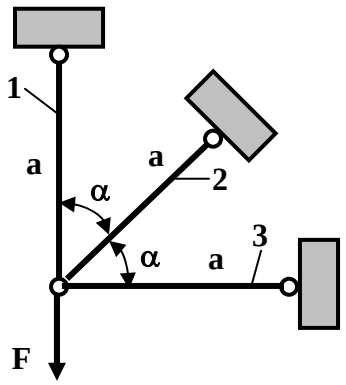


Fig.3.4.2.9-1

Rezolvare:

- De la studiul sistemelor de bare articulate, ne reamintim că la acest tip de probleme, trebuie determinate mai întâi eforturile axiale din bare (vezi calculul sistemelor de bare articulate).
- Sistemul pentru calculul eforturilor axiale, pentru acest exemplu, este prezentat în Fig.3.4.2.9-2.

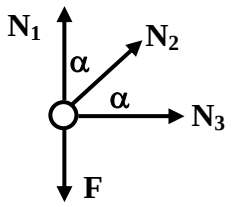


Fig.3.4.2.9-2

- Pentru determinarea eforturilor N_1, N_2, N_3, pentru sistemul din Fig.3.4.2.9-2, se pun condițiile de echilibru (sistenul de forțe este plan).

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \Rightarrow N_2 \cdot \cos\alpha + N_3 = 0 \qquad 3.4.2.9\text{-}1a$$

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 \cdot \sin\alpha - F = 0 \qquad 3.4.2.9\text{-}1b$$

$$\left(\sum M\right)_K = 0 \Rightarrow \text{Nu se poate scrie.} \qquad 3.4.2.9\text{-}1c$$

- Se constată că s-au scris două ecuații şi sunt trei necunoscute (eforturil N_1, N_2, N_3). Rezultă de aici, că sistemul de bare, este static nedeterminat o dată (n = 1).
- Una din metode (metoda relațiilor dintre deplasările diferitelor secțiuni ale elementelor ce compun sistemul) a fost prezentată la capitolul rezervat solicitării axiale. Aplicarea acestei metode pentru problema noastră, este dificilă, deoarece găsirea pe cale geometrică a relațiilor care există între deformațiile celor trei bare, necesită cunoştiințe temeinice de geometrie din partea rezolvitorului.
- Găsirea unuia dintre eforturi (ridicarea nedeterminării) pentru acest sistem de bare articulate, se face acum prin **metoda sarcinii unitare, procedeul Veresceaghin.**

Se vor parcurge etapele cunoscute pentru această metodă, însă se va ține seama numai de efortul axial. De altfel, asupra celor trei bare articulate, nu acționează alte eforturi.

- Se formează sistemul echivalent SE cel mai convenabil (Fig.3.4.2.9-3a) şi sistemul de bază SB, (Fig.3.4.2.9-3b).
- Sistemul de ecuații de condiție, pentru n = 1, este:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{10} = 0 \qquad 3.4.2.9\text{-}2$$

de unde rezultă expresia pentru efortul axial X_1:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} \qquad 3.4.2.9\text{-}3$$

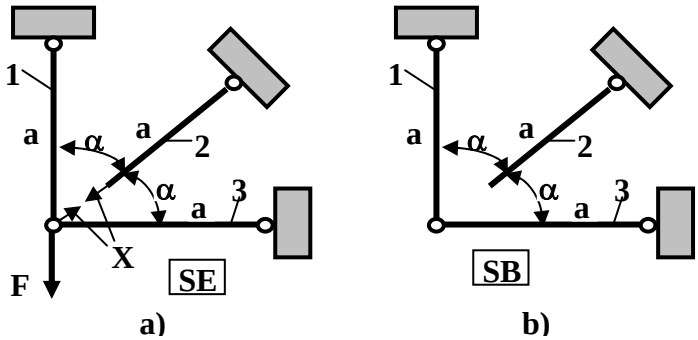


Fig.3.4.2.9-3

- Se ia sistemul de bază SB (Fig.3.4.2.9-4a) şi se trasează diagrama de efort axial N_0. Pentru a putea trasa diagrama N_0, trebuie determinate eforturile axiale N_{01}, N_{02}, N_{03} din cele trei bare. Schema după care se determină aceste eforturi, este prezentată în Fig.3.4.2.9-5.
  Efortul $N_{02} = 0$.

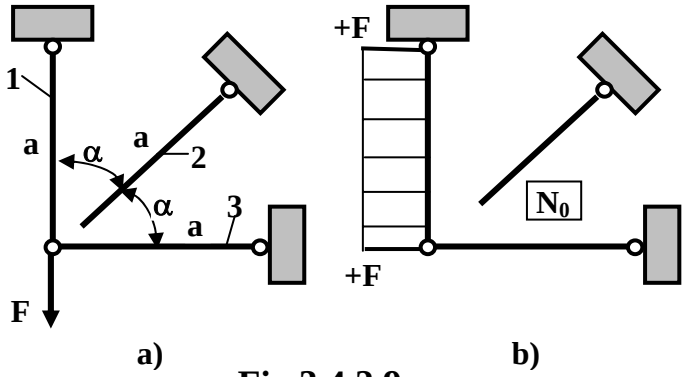


Fig.3.4.2.9-

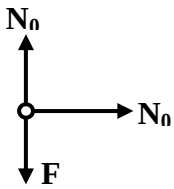


Fig.3.4.2.9-

Putem scrie:

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \Rightarrow N_{03} = 0 \qquad 3.4.2.9\text{-}4a$$

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \Rightarrow N_{01} - F = 0 \Rightarrow N_{01} = F \qquad 3.4.2.9\text{-}4b$$

Cu valorile eforturilor N_{01}, N_{02}, N_{03}, se trasează diagrama N_0, (Fig.3.4.2.9-4b).

- Se încarcă sistemul de bază SB cu necunoscuta $X_1 = 1$ (Fig.3.4.2.9-6a) şi pe schema din Fig.3.4.2.9-6b, se calculează eforturile n_1, n_2, n_3. Se observă că $n_2 = 1$.

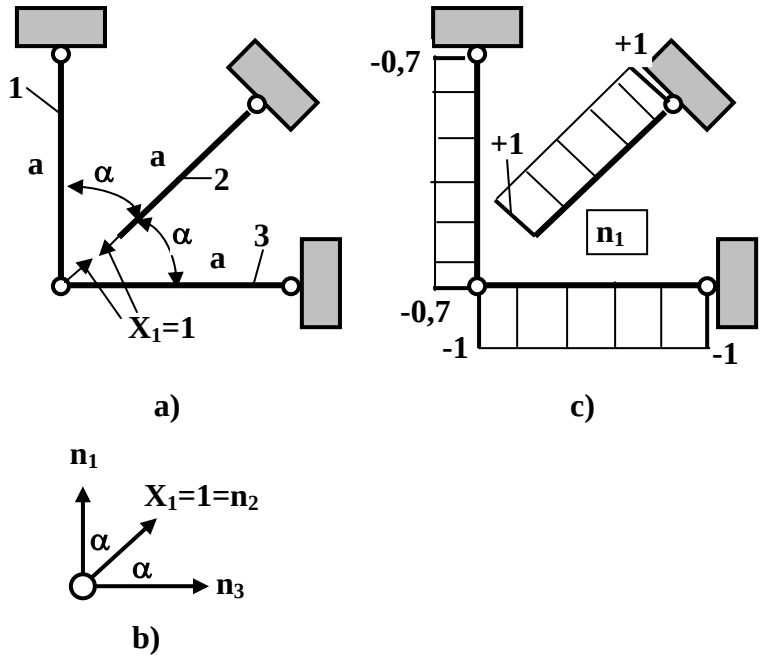


Fig.3.4.2.9-6

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \Rightarrow n_3 + 1 \cdot \cos\alpha = 0 \qquad 3.4.2.9\text{-}5a$$

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \Rightarrow n_1 + 1 \cdot \sin\alpha = 0 \qquad 3.4.2.9\text{-}5b$$

Rezultă:

$$n_1 = -\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}7 \qquad 3.4.2.9\text{-}6a$$

$$n_3 = -\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}7 \qquad 3.4.2.9\text{-}6b$$

$$n_2 = 1 \qquad 3.4.2.9\text{-}6c$$

Cu valorile n_1, n_2 şi n_3, se trasează diagrama $\mathbf{n_1}$ (Fig.3.4.2.9-6c).

♦ Coeficienții ecuației 3.4.2.9-3, se determină cu ajutorul diagramelor N_0 şi $\mathbf{n_1}$, care sunt prezentate alăturat, în Fig.3.4.2.9-7.

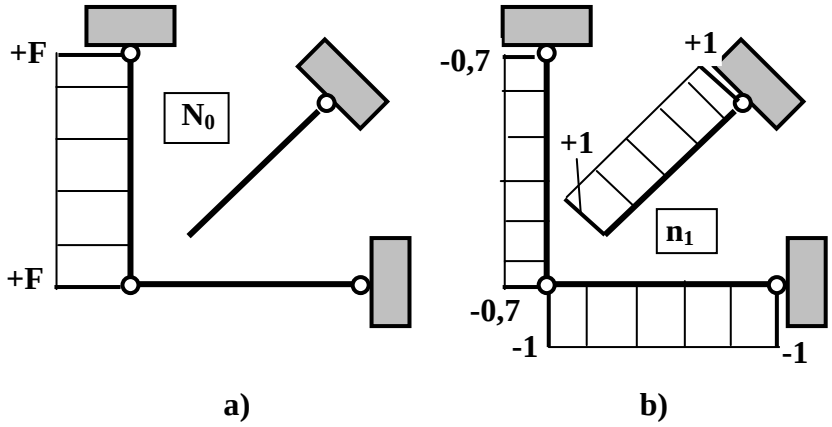


Fig.3.4.2.9-7

♦ Valorile coeficienților ecuației 3.4.2.9-3, sunt:

$$\Delta_{10} = -\frac{Fa \cdot 0,7}{E_1 \cdot A_1} + 0 + 0 = -0,7 \cdot \frac{Fa}{EA}$$

$$\delta_{11} = \frac{0,7 \cdot a \cdot 0,7}{E_1 \cdot A_1} + \frac{1 \cdot a \cdot 1}{E_2 \cdot A_2} + \frac{0,7 \cdot a \cdot 0,7}{E_3 \cdot A_3} = 2 \cdot \frac{a}{EA}$$

♦ Din relația 3.4.2.9-3, rezultă efortul axial necunoscut:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{0,7Fa}{EA}}{\frac{2a}{EA}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot F \approx 0,352F$$

♦ Sistemul din Fig.3.4.2.9-1 devine static determinat solicitat ca în Fig.3.4.2.9-8. Acest sistem, poate fi rezolvat mai departe după metodele cunoscute de la sistemele de bare articulate.

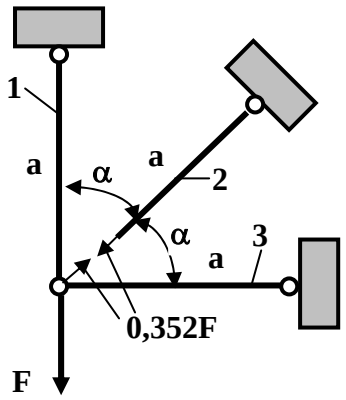


Fig.3.4.2.9-8

♦ Eforturile din cele trei bare articulate, se pot calcula uşor:

$$N_1 = N_{01} + X_1 \cdot n_1 = F + \frac{\sqrt{2}}{4} F \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3}{4} \cdot F$$ (efort axial de întindere)

$$N_2 = N_{02} + X_2 \cdot n_2 = 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} F \cdot (+1) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot F \approx 0{,}352 \cdot F$$ (efort axial de întindere)

$$N_3 = N_{03} + X_3 \cdot n_3 = 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} F \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{1}{4} \cdot F$$ (efort axial de compresiune)

♦ În concluzie, eforturile axiale din cele trei bare, sunt:

$$N_1 = \frac{3}{4} \cdot F = 0{,}75 \cdot F \qquad 3.4.2.9\text{-}8a$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot F = 0{,}352 \cdot F \qquad 3.4.2.9\text{-}8b$$

$$N_3 = -\frac{1}{4} \cdot F = -0{,}25 \cdot F \qquad 3.4.2.9\text{-}8c$$

♦ În continuare, se pot efectua calcule de rezistență sau deformabilitate, după metodele cunoscute.

4. CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL BARELOR CURBE PLANE

4.1 Considerații generale. Etape de calcul

Barele curbe plane, sunt acele bare curbe, care au axa longitudinală într-un singur plan. Se admite că acest plan este totodată şi plan de simetrie pentru bară şi că planul forțelor, coincide cu acest plan de simetrie.

Sub acțiunea unui sistem de forțe coplanare, situat în planul barei curbe, în secțiunile transversale ale acesteea, iau naştere eforturi axiale N, tăietoare T şi momente încovoietoare M_i.

Efortul axial N, dezvoltă tensiuni normale σ. Se acceptă că aceste tensiuni sunt repartizate uniform pe suprafața secțiunii transversale şi ele se calculează cu relația cunoscută de la barele drepte:

$$\sigma = \sigma_N = \pm \frac{N}{A} \qquad 4.1\text{-}1$$

Efortul tăietor T, dezvoltă tensiuni tangențiale τ. Cu aproximație, aceste tensiuni se pot determina cu ajutorul relației lui Jurawski, dedusă pentru barele drepte:

$$\tau = \frac{T \cdot S_z}{I_z \cdot b} \qquad 4.1\text{-}2$$

Pentru barele curbe care prezintă secțiune transversală mare, tensiunile tangențiale sunt de valori mici şi de cele mai multe ori, ele se neglijează.

Momentul încovoietor, produce tensiuni normale σ. Pentru bara cu curbură mică (rază de curbură mare), având raportul dintre raza de curbură R şi înălțimea secțiunii h (măsurată pe direcție radială) mai mare decât 5 ... 6, tensiunile normale σ produse de

momentul încovoietor M_i, se pot calcula cu relația lui Navier de la barele drepte:

$$\sigma = \sigma_{Miz} = \pm \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \qquad 4.1\text{-}3$$

Relația 4.1-3 dă erori cu atât mai mari, cu cât curbura barei este mai mare (raza de curbură mai mică). Dacă raportul R/h < 5 ... 6, adică bara prezintă o curbură mare, este necesară aplicarea în calcule a relației stabilită pentru barele curbe.

În literatura de specialitate, sunt cunoscute două relații pentru calculul tensiunilor normale σ la bare curbe plane, solicitate la îmcovoiere:

a) relația lui Winkler

b) relația lui Toll.

a) Dintre cele două relații, relația lui Winkler este cea mai utilizată, fiind mai simplă şi permite utilizarea unor cunoştințe de la încovoierea pură a barelor drepte.

Relația lui Winkler, pentru calculul tensiunii normale la încovoiere, într-un punct k dintr-o secțiune a unei bare curbe plană cu curbură mare, este:

$$\sigma_K = \sigma_{K,Miz} = \frac{\pm M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{\pm y_K}{r_n - (\pm y_K)} \qquad 4.1\text{-}4$$

unde:

M_{iz} - momentul încovoietor din secțiunea în care este situat punctul K. În fața lui M_{iz} se pune semnul + dacă acesta deschide bara (micşorează curbura) şi semnul - , dacă închide bara (măreşte curbura)

A - aria secțiunii transversale a barei, secțiune în care este situat punctul K

e - distanța dintre axa neutră şi axa centrală Gz (axa centrală Gy, este totdeauna axa care trece şi prin centrul de curbură, având sensul pozitiv spre centrul de curbură)

r_n - raza de curbură a axei neutre

y_K - distanța de la axa neutră până la punctul K în care se calculează tensiunea normală. În fața lui y_K se pune semnul + dacă punctul este situat spre centrul de curbură şi semnul - , dacă acesta este situat spre fibrele extreme exterioare.

Tensiunile maxime se ating în fibrele extreme (interioare, respectiv exterioare) şi acestea se pot calcula cu relațiile:

$$\sigma_{int} = \sigma_i = \frac{\pm M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{+|y_1|}{R_1} \qquad 4.1\text{-}5a$$

$$\sigma_{ext} = \sigma_e = \frac{\pm M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{-|y_2|}{R_2} \qquad 4.1\text{-}5b$$

unde:

$|y_1|$ - distanța în modul dintre axa neutră şi fibrele extreme interioare barei curbe

$|y_2|$ - distanța în modul dintre axa neutră şi fibrele extreme situate la exteriorul barei curbe

R_1 - distanța de la centrul de curbură la fibrele extreme interioare (raza de curbură a fibrei extreme interioare)

R_2 - distanța de la centrul de curbură la fibrele extreme exterioare (raza de curbură a fibrei extreme exterioare).

După cum se poate constata, în relațiile 4.1-4, 4.1-5, trebuie ținut seama de anumite convenții de semn (pentru M_{iz} şi y_K), ceea ce de multe ori, complică calculele.

Pentru un calcul mai simplu şi mai ferit de greşeli, în cazul barelor curbe plane cu curbură mare, solicitate la încovoiere, pentru calculul tensiunii normale într-un punct K dintr-o secțiune, se poate utiliza următoarea relație:

$$\sigma_K = \frac{\pm M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{y_K}{r_K} \qquad 4.1\text{-}6$$

unde:

y_K - distanţa în modul, dintre axa neutră şi punctul K în care se calculează tensiunea

r_K - raza de curbură (în modul) a fibrei care conţine punctul K.

În relaţia 4.1-6, toate mărimile care intervin (inclusiv M_i) se introduc în valoare absolută. După semnul egal, se pune semnul + sau -, după cum punctul K, este situat în zona întinsă sau cea comprimată a secţiunii, aşa după cum judecam şi la barele drepte. Utilizând relaţia propusă (rel.4.1-6), nu mai trebuie reţinută nicio convenţie de semn.

În toate variantele prezentate, după cum se observă, intervine mărimea **e**, care reprezintă distanţa dintre axa neutră şi axa centrală Gz. Excentricitatea **e** (după cum se mai numeşte), poate fi determinată în două moduri:

- *În modul exact*, mai întâi se determină cu anumite relaţii, poziţia axei neutre (raza de curbură a axei neutre) prin mărimea r_n. Cunoscând mărimea r_n, se calculează excentricitatea **e**, cu relaţia:

$$e = R - r_n \qquad 4.1\text{-}7$$

unde:

R - raza de curbură a axei geometrice a barei curbe.

În Tabelul 4.1-1, se prezintă relaţiile de calcul pentru raza de curbură a axei neutre r_n, pentru câteva suprafeţe simple, des întâlnite în construcţia de maşini.

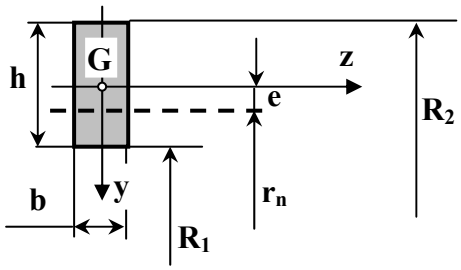
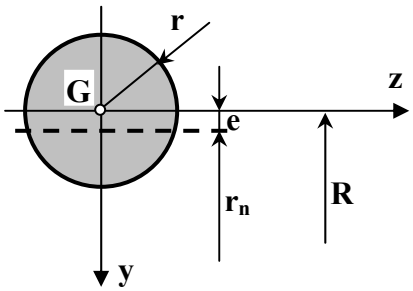
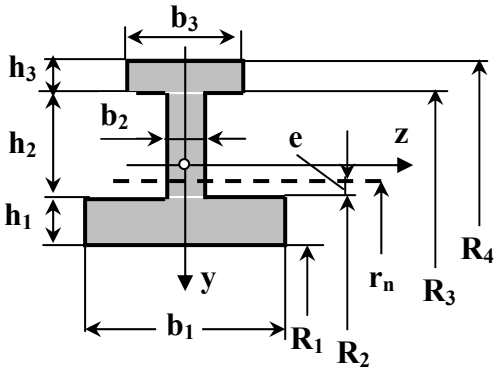
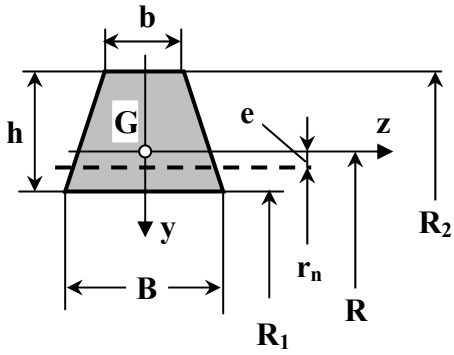
- *În modul aproximativ,* excentricitatea **e**, se calculează cu relaţia:

$$e \approx \frac{I_z}{A \cdot R} \qquad 4.1\text{-}8$$

unde:

I_z - momentul de inerţie axial, faţă de axa centrală Gz (care este şi axa de încovoiere), a suprafeţei secţiunii transversale a barei, secţiune în care se calculează tensiunea normală σ.

Tabelul 4.1-1

Poziția	Secțiunea	Relația pentru r_n
1		$r_n = h / [\ln (R_2 / R_1)]$
2		$r_n = [R + (R^2 - r^2)^{1/2}] / 2$
3		$r_n = A / (t_1 + t_2 + t_3)$ unde: $t_1 = b_1 \cdot \ln(R_2 / R_1)$ $t_2 = b_2 \cdot \ln(R_3 / R_2)$ $t_3 = b_3 \cdot \ln(R_4 / R_3)$ **A - aria totală a secțiunii**
4		$r_n = A / (t_1 \cdot \ln t_2)$ unde: $t_1 = (B \cdot R_2 - b \cdot R_1) / h$ $t_2 = [R_2 / R_1 - (B - b)]$ $A = (B + b) \cdot h / 2$ (aria suprafeței secțiunii)

La barele curbe plane, axa neutră este paralelă cu axa centrală Gz, şi situată faţă de aceasta înspre centrul de curbură.

La barele curbe plane, în secţiunile transversale, apare şi efort axial N (rezultă o solicitare compusă de categoria I). În acest caz de solicitare, tensiunea normală rezultantă în punctul K, se calculează cu relaţia:

$$\sigma_K = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{y_K}{r_K} \qquad 4.1\text{-}9$$

Analizând relaţia 4.1-4, rezultă că tensiunea normală σ la bare curbe plane, variază pe secţiune după o lege hiperbolică. Această hiperbolă prezintă porţiunea cu panta cea mai mare, totdeauna spre centrul de curbură. Pentru reprezentarea tensiunii normale pe secţiune, trebuie determinată poziţia axei neutre (vezi această problemă la barele drepte). Poziţia acesteea este deja determinată de la calculul tensiunii normale, calcul ce nu poate fi efectuat fără a cunoaşte poziţia axei neutre (mărimea excentricităţii **e** sau r_n).

Pentru calculul de rezistenţă al barelor curbe plane, trebuie parcurse următoarele **etape**:

- Se reprezintă bara numai prin axa sa geometrică.
- Se reduc toate forţele aplicate, în centrul de greutate al secţiunii în care ele acţionează şi componentele rezultate se aşează pe bara reprezentată numai prin axa sa geometrică.
- Pentru acest sistem, se trasează diagramele de eforturi N şi M_i (efortul tăietor T se neglijează).
- Funcţie de variaţia secţiunii în lungul elementului de rezistenţă şi mărimea eforturilor, se stabileşte secţiunea periculoasă.
- Se desenează secţiunea periculoasă şi se scriu valorile eforturilor din secţiunea periculoasă. Se poziţionează şi centrul de curbură al barei, faţă de secţiunea periculoasă.
- Se stabileşte tipul solicitării (va rezulta o solicitare compusă de categoria I).
- Pe secţiunea periculoasă, se stabilesc punctele cele mai solicitate: la întindere, respectiv la compresiune (vezi

solicitarea compusă de categoria I, Cap. 2). Aceste puncte vor fi situate pe fibrele extreme interioare, respectiv exterioare.

- Dacă secțiunea periculoasă:
  - se află pe o porțiune dreaptă a elementului de rezistență (bara nu este curbă în acest loc), calculul se face ca la barele drepte (vezi Cap.2),
  - se află pe o porțiune curbă a barei sau în porțiunea de separare între cea curbă şi dreaptă, se calculează raportul R / h. Dacă R / h > 5...6, calculul se face cu relațiile de la barele drepte, iar dacă R/h < 5 ... 6, calculul se face cu relațiile pentru bare curbe, parcurgându-se mai departe următorarele etape:
- Se scrie relația generală de calcul a tensiunii normale (rel. 4.1-9)
- Se particularizează relația 4.1-9 pentru punctele cele mai solicitate şi pentru tipul problemei (verificare, dimensionare, efort capabil).
- Pentru relațiile particularizate, se calculează:

A - aria secțiunii transversale (a secțiunii periculoase)

e - excentricitatea (cu una dintre relațiile 4.1-7 sau 4.1-8)

y_K - distanța de la axa neutră la punctele cele mai solicitate

r_K - raza de curbură a fibrelor pe care sunt situate punctele cele mai solicitae.

- Având calculate mărimile de mai sus, acestea se introduc în relațiile particularizate pentru punctele cele mai solicitate, iar din aceste relații finale, se determină mărimea cerută.

Dacă se cere să se reprezinte şi variația tensiunii normale pe secțiune, se parcurg **etapele**:

- Se duc paralele la axa neutră prin punctele cele mai solicitate.
- Se reprezintă variația tensiunii normale, având grijă ca totdeauna panta cea mai mare a curbei, să fie situată spre centrul de curbură.
- În cele două porțiuni, se pun semnele corespunzătoare tensiunii (plus şi minus), precum şi valorile maxime ale tensiunii.

- Se duc "haşurile" diagramei tensiunii normale.

b) Relaţia lui Toll pentru calculul tensiunii normale într-un punct K dintr-o secţiune a unei bare curbe plană cu curbură mare, este:

$$\sigma_K = \frac{1}{A} \cdot \left(\pm N + \frac{\pm M_i}{R} + \frac{\pm M_i}{k \cdot R} \cdot \frac{\pm y_K}{R + (\pm y_K)} \right) \qquad 4.1\text{-}10$$

unde:

A - aria secţiunii transversale în care este situat punctul K

N - efortul axial din secţiunea în care se calculează tensiunea. El are semnul + dacă este de întindere şi - dacă este de compresiune

M_i - momentul încovoietor din secţiunea în care se calculează tensiunea. Are semnul + dacă închide bara curbă (măreşte curbura) şi semnul - dacă deschide bara (micşorează curbura)

k - un coeficient (coeficientul lui Toll), care are expresia:

$$k \approx \frac{I_z}{A \cdot R^2} \qquad 4.1\text{-}11$$

R - raza de curbură a axei geometrice a barei curbe

y_K - coordonata y a punctului K, şi măsoară distanţa dintre axa geometrică şi punctul K în care se calculează tensiunea. Coordonata y_K are semnul + dacă punctul K este situat faţă de axa geometrică spre fibrele extreme exterioare şi semnul - dacă este situat spre centrul de curbură faţă de axa geometrică.

Observaţie: Convenţiile de semne pentru M_i şi y_K, în cele două relaţii prezentate pentru calculul tensiunii normale la bare curbe plane (Winkler şi Toll), sunt contrarii.

Calculul tensiunii normale σ la bare curbe plane, după relaţia lui Toll, nu poate fi făcută decât ţinând seama strict de condiţiile de semn, pentru M_i şi y_K.

Pentru reprezentarea variaţiei tensiunii normale pe secţiune se determină poziţia axei neutre (care este tot paralelă cu axa centrală Gz), din ecuaţia axei neutre, care are expresia:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{R} + \frac{M_i}{k \cdot R} \cdot \frac{y_0}{R + y_0} = 0 \qquad 4.1\text{-}12$$

unde:

y_0 -coordonata unui punct de pe axa neutră (distanţa dintre axa geometrică şi axa neutră)

Pentru simplificarea calculelor, în relaţia 4.1-12, se neglijează efortul axial N, de unde rezultă poziţia axei neutre:

$$y_0 \approx -\frac{k \cdot R}{1 + k} \qquad 4.1\text{-}13$$

Se poate constata că şi după această relaţie, axa neutră este situată faţă de axa geometrică tot spre centrul de curbură al barei curbe şi este paralelă cu axa geometrică.

Etapele de calcul sunt aceleaşi cu cele prezentate la relaţia lui Winkler, deosebirile apar doar la relaţia de calcul a tensiunii normale şi la cea de determinare a poziţiei axei neutre.

4.2 Modele de probleme rezolvate

În toate exemplele care urmează, se va aplica relaţia lui Winkler pentru calculul tensiunii normale.

4.2.1 *Pentru bara din Fig.4.2.1-1, se cer:*

a) *verificarea barei, pentru* σ_a *= 150 MPa*

b) *variaţia tensiunii normale în secţiunea periculoasă.*

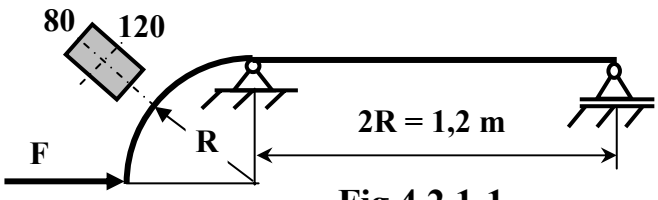


Fig.4.2.1-1

Rezolvare:

Se vor parcurge toate etapele recomandate în acest capitol.

- Se reprezintă bara numai prin axa sa geometrică. Această etapă este efectuată chiar din enunţul problemei (vezi Fig.4.2.1-1).
- Forţele aplicate sunt reduse şi aplicate pe bară (încă din enunţ).
- Rezultă sistemul din Fig.4.2.1-2a:

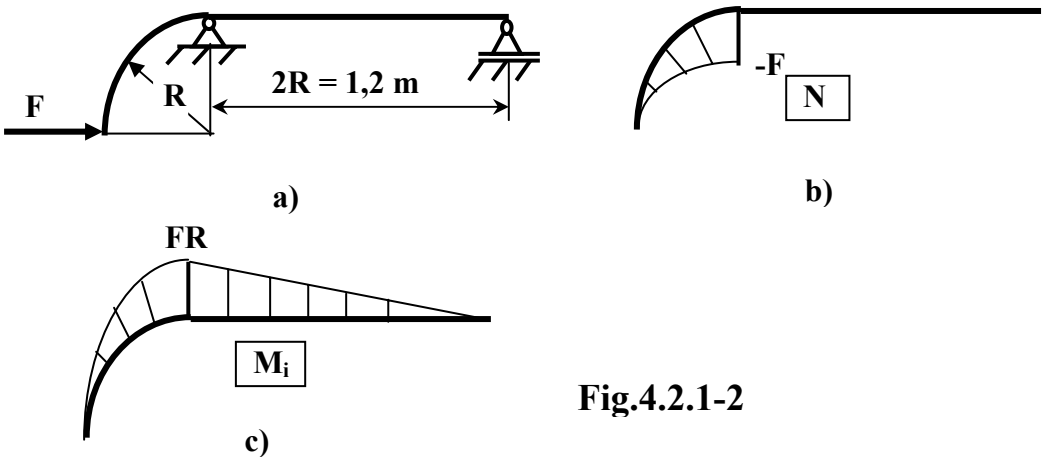


Fig.4.2.1-2

Diagramele de eforturi N şi M_i pentru sistemul rezultat (Fig.4.2.1-2a) sunt prezentate în Fig.4.2.1-2b, respectiv Fig.4.2.1-2c.

- Bara are secţiune constantă. Rezultă că secţiunea periculoasă este pe reazemul fix (din stânga).
- Secţiunea periculoasă cu forma şi poziţia sa, este prezentată în Fig.4.2.1-3.

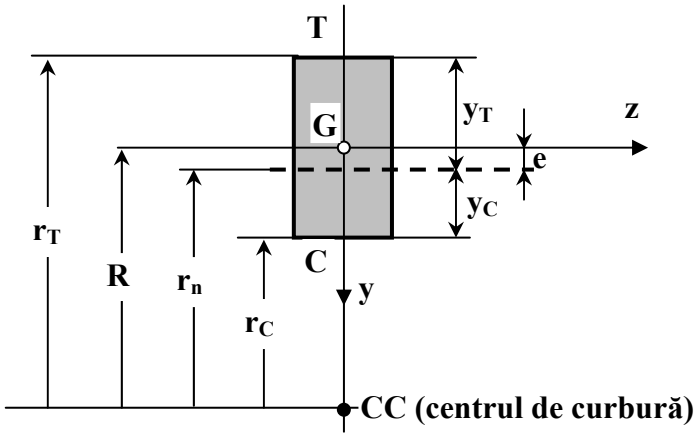


Fig.4.2.1-3

- Eforturile din secţiunea periculoasă, sunt:

$$N = - F = - 8 \text{ KN}$$

$$M_{iz} = F \cdot R = 4{,}8 \text{ KN} \cdot \text{m} \qquad 4.2.1\text{-}1$$

- Rezultă o solicitare compusă de categoria I.
- Punctele cele mai solicitate din secțiunea periculoasă sunt punctele T la întindere şi punctele C la compresiune (Fig.4.2.1-3).
- Secțiunea periculoasă este situată tocmai în zona de trecere de la forma dreaptă la cea curbă.
- Se calculează raportul R / h, unde R = 600 mm:

$$\frac{R}{h} = \frac{600}{120} = 5 \qquad 4.2.1\text{-}2$$

- În acest caz, tensiunea normală se calculează cu relațiile de la barele curbe. Relația generală de calcul a tensiunii normale (relația lui Winkler), este (rel. 4.1-9):

$$\sigma_K = \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{y_K}{r_K} \qquad 4.2.1\text{-}3$$

- Pentru punctele cele mai solicitate, relația 4.2.1-3, are forma.

$$\sigma_T = -\frac{F}{A} + \frac{FR}{A \cdot e} \cdot \frac{y_T}{r_T} \qquad 4.2.1\text{-}4a$$

$$\sigma_C = -\frac{F}{A} - \frac{FR}{A \cdot e} \cdot \frac{y_C}{r_C} \qquad 4.2.1\text{-}4b$$

- Pentru secțiunea periculoasă, rezultă:

$A = 120 \cdot 80 = 9.600 \text{ mm}^2$

$e \approx \frac{I_z}{A \cdot R} \approx 2 \text{ mm}$

$y_T = 60 + e = 62$ mm (Fig.4.2.1-3)

$y_C = 60 - e = 58$ mm (Fig.4.2.1-3)

$r_T = R + 60 = 660$ mm (Fig.4.2.1-3)
$r_C = R - 60 = 540$ mm (Fig.4.2.1-3)

- Particularizate, relaţiile 4.2.1-4a şi 4.2.1-4b, devin:

$$\sigma_{max,t} = \sigma_T = -\frac{8 \cdot 10^3}{9.600} + \frac{4{,}8 \cdot 10^6}{9.600 \cdot 2} \cdot \frac{62}{660} = 22{,}56 \text{ MPa} < \sigma_{at}$$

$$\sigma_{max,c} = \sigma_C = -\frac{8 \cdot 10^3}{9.600} - \frac{4{,}8 \cdot 10^6}{9.600 \cdot 2} \cdot \frac{58}{540} = -27{,}64 \text{ MPa} < \sigma_{ac}$$

- Poziţia axei neutre fiind cunoscută (e = 2 mm), se poate reprezenta variaţia tensiunii normale în secţiunea periculoasă (Fig.4.2.1-4)

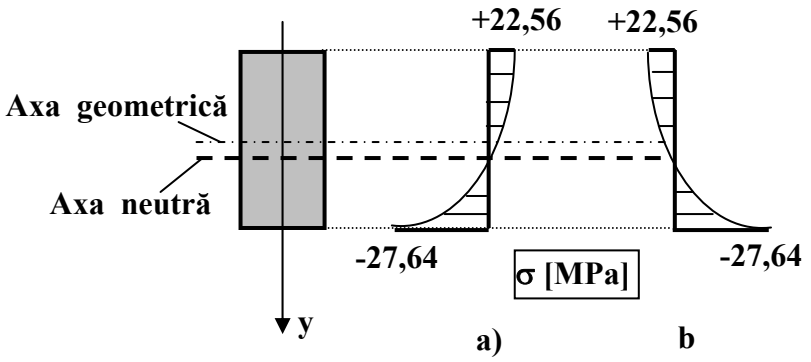


Fig.4.2.1-4

Ambele reprezentări (Fig.4.2.1-4a,b) sunt corecte, deoarece panta mai mare a diagramei este în ambele cazuri spre centrul de curbură.

4.2.2 *Pentru bara de secţiune circulară din Fig.4.2.2-1, se cer:*

a) *valoarea forţei capabile (F = ?) pentru* σ_a *= 150 MPa*

b) *diagrama de variaţie a tensiunii normale în secţiunea periculoasă.*

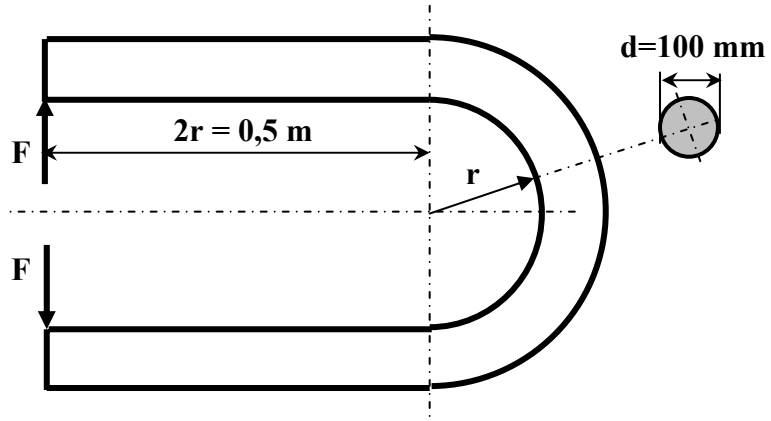


Fig.4.2.2-1

Rezolvare:

- Bara reprezentată prin axa sa geometrică şi încărcată cu componentele rezultate din reducerea forțelor F, este prezentată în Fig.4.2.2-2a.

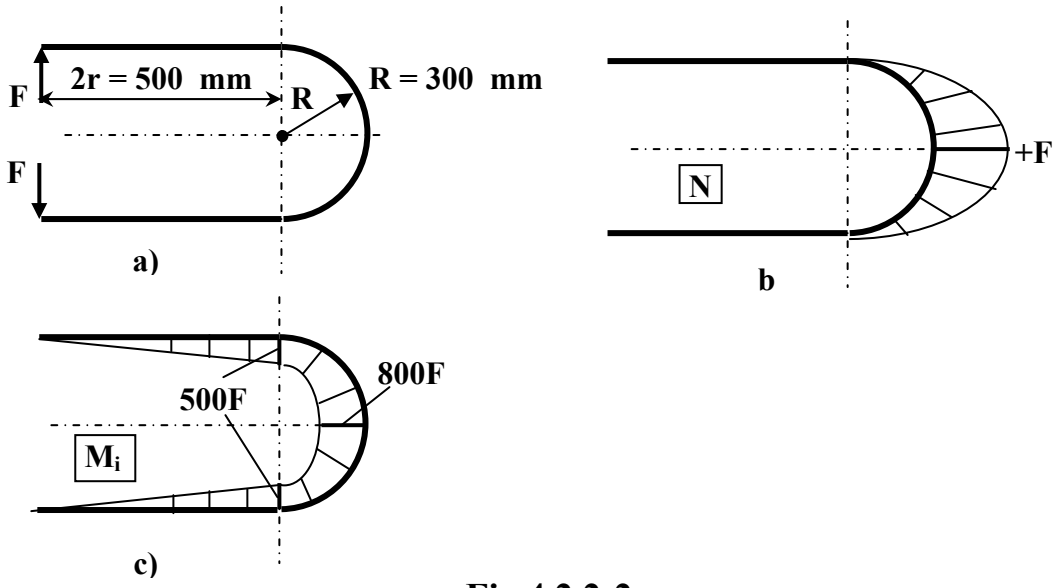


Fig.4.2.2-2

Atenție: Pentru acest exemplu R ≠ r. Raza de curbură a axei geometrice R este:

$$R = r + \frac{d}{2} = 250 + 50 = 300 \text{ mm} \qquad 4.2.2\text{-}1$$

- Diagramele de eforturi pentru sistemul din Fig.4.2.2-2a, sunt prezentate în Fig.4.2.2-2b şi Fig.4.2.2-2c.
- Secţiunea periculoasă rezultă pe porţiunea curbă, unde acţionează eforturile:

$$N = F$$
$$M_{iz} = 800 \cdot F \qquad 4.2.2\text{-}2$$

- Rezultă o solicitare compusă de categoria I.
- Secţiunea periculoasă cu forma şi poziţia ei, este prezentată în Fig.4.2.2-3.
- Punctul cel mai solicitat la întindere este punctul T, iar cel mai solicitat la compresiune este punctul C (Fig.4.2.2-3).
- Raportul R / h, este:

$$\frac{R}{h} = \frac{300}{100} = 3 \qquad 4.2.2\text{-}3$$

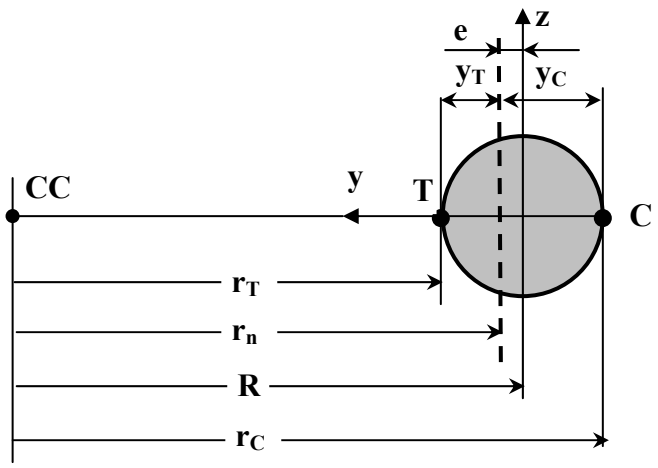


Fig.4.2.2-3

- Calculul de rezistenţă se face cu relaţia lui Winkler:

$$\sigma_K = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{y_K}{r_K} \qquad 4.2.2\text{-}4$$

- Relaţia 4.2.2-4, particularizată pentru punctele T şi C, devine:

$$\sigma_T = \frac{F}{A} + \frac{FR}{A \cdot e} \cdot \frac{y_T}{r_T} = \sigma_{at} \qquad 4.2.2\text{-}5a$$

$$\sigma_C = \frac{F}{A} - \frac{FR}{A \cdot e} \cdot \frac{y_C}{r_C} = \sigma_{ac} \qquad 4.2.2\text{-}5b$$

♦ Se calculează mărimile care intervin în relațiile 4.2.2-5a,b:

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 7.853{,}98 \ \text{mm}^2$$

$$e \approx \frac{I_z}{A \cdot R} \approx 2 \ \text{mm}$$

$$y_T = \frac{d}{2} - e = 48 \ \text{mm}$$

$$y_C = \frac{d}{2} + e = 52 \ \text{mm}$$

$$r_T = R - \frac{d}{2} = 250 \ \text{mm}$$

$$r_C = R + \frac{d}{2} = 350 \ \text{mm}$$

♦ Cu valorile de mai sus, relațiile 4.2.2-5a,b devin:

$$\frac{F}{7.853{,}98} + \frac{800 \cdot F}{7.853{,}98 \cdot 2} \cdot \frac{48}{250} = 150 \qquad 4.2.2\text{-}6a$$

$$\frac{F}{7.853{,}98} - \frac{800 \cdot F}{7.853{,}98 \cdot 2} \cdot \frac{52}{350} = -150 \qquad 4.2.2\text{-}6b$$

♦ Din relația 4.2.2-6a rezultă F' = 15,143 KN, iar din relația 4.2.2-6b rezultă F'' =20,163 KN.

♦ Forța capabilă pentru bară, este:

$$F_{cap} = \min(F' ; F'') = F' = 15{,}143 \ \text{KN}$$

- Pentru a reprezenta variaţia tensiunii normale în secţiunea periculoasă, trebuie calculată tensiunea normală din punctul C, cu forţa $F = F_{cap} = 15{,}143$ KN.
  Se obţine:

$$\sigma_{max,c} \frac{15{,}143 \cdot 10^3}{7.853{,}98} - \frac{800 \cdot 15{,}143 \cdot 10^3}{7.853{,}98 \cdot 2} \cdot \frac{52}{350} = -112{,}65 \text{ MPa}$$

- Variaţia tensiunii normale din secţiunea periculoasă, este prezentată în Fig.4.2.2-4.

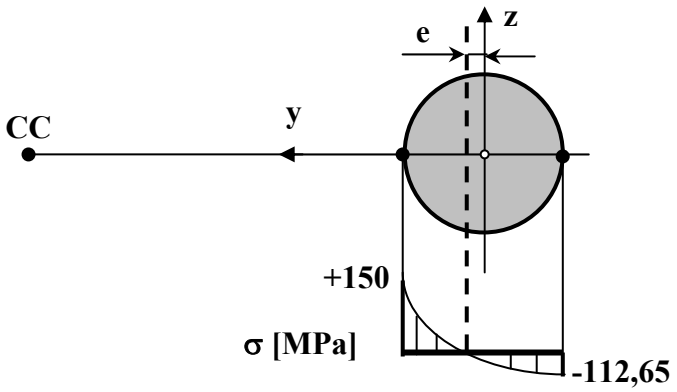


Fig.4.2.2-4

4.2.3 *Pentru bara din Fig.4.2.3-1, se cer:*

a) *sarcina capabilă (p = ?) pentru* σ_{at} *= 30 MPa şi* σ_{ac} *= -90 MPa*

b) *variaţia tensiunii normale din secţiunea periculoasă (fără calculul valorilor maxime).*

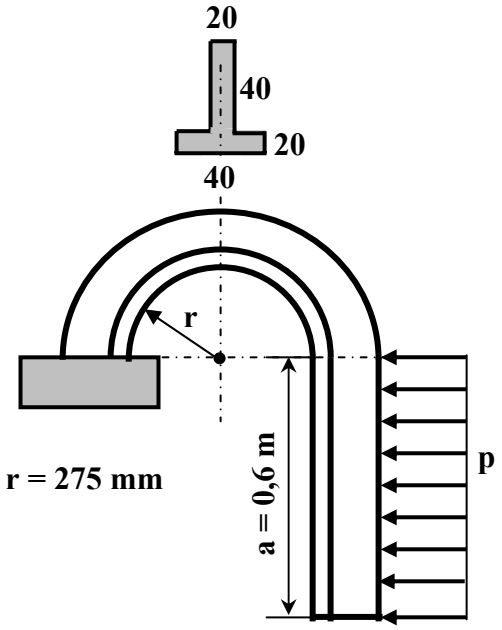


Fig.4.2.3-1

Rezolvare:

- Bara reprezentată numai prin axa sa geometrică şi încărcată cu componentele rezultate prin reducerea sarcinii p, este prezentată în Fig.4.2.3-2a.

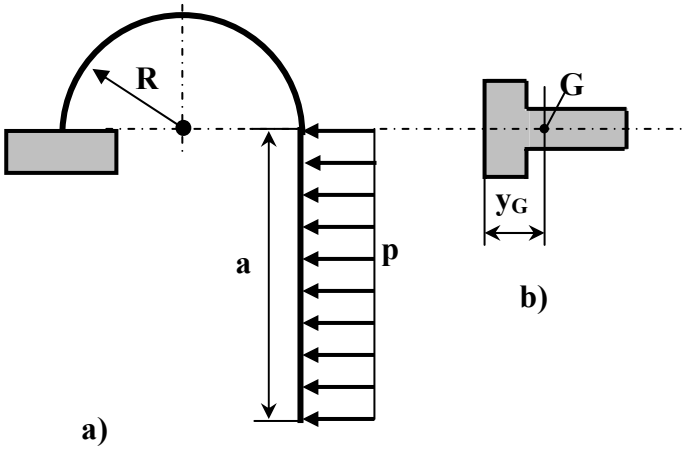


Fig.4.2.3-2

Nici la această bară, raza r nu reprezintă raza de curbură a axei geometrice R. Pentru calculul lui R, trebuie determinată poziția centrului de greutate al secțiunii (vezi Fig.4.2.3-2b). După calcule, se obține y_G = 25 mm şi

$$R = r + y_G = 275 + 25 = 300 \text{ mm} \qquad 4.2.3\text{-}1a$$

iar

$$a = 2 \cdot R = 600 \text{ mm} \qquad 4.2.3\text{-}1b$$

- Diagramele de eforturi N şi M_i ale sistemului din Fig.4.2.3-2a sunt prezentate în Fig.4.2.3-3:

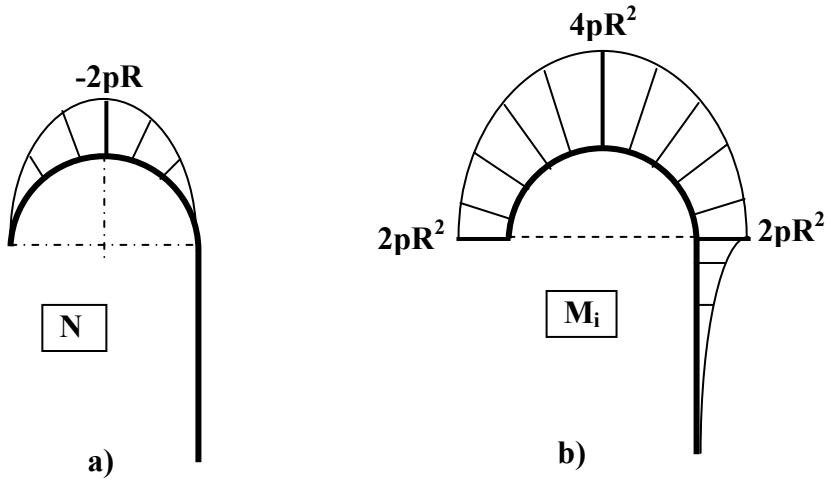


Fig.4.2.3-3

- În secțiunea periculoasă acționează eforturile:

$$N = -2\,pR \qquad 4.2.3\text{-}2a$$
$$M_{iz} = 4\,pR^2 \qquad 4.2.3\text{-}2b$$

rezultând o solicitare compusă de categoria I.

- Secțiunea periculoasă cu forma şi poziția sa, este prezentată în Fig.4.2.3-4.
- Punctele cele mai solicitate la întindere T, respectiv compresiune C, sunt arătate în Fig.4.2.3-4.

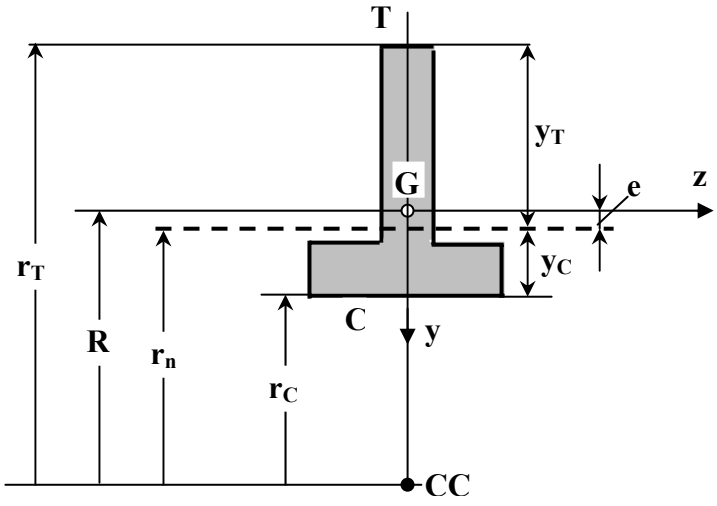


Fig.4.2.3-4

- Secțiunea periculoasă este situată într-o porțiune curbă, unde raportul R / h, este:

$$\frac{R}{h} = \frac{300}{60} = 5 \qquad 4.2.3\text{-}3$$

- Calcul de rezistență se face în acest caz cu relația de la bare curbe (relația lui Winkler), a cărei expresie generală, este:

$$\sigma_K = \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{y_K}{r_K} \qquad 4.2.3\text{-}4$$

- Relația 4.2.3-4, particularizată pentru punctele T şi C, devine:

$$\sigma_{max,t} = \sigma_T = -\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{y_T}{r_T} = \sigma_{at} \qquad 4.2.3\text{-}5a$$

$$\sigma_{max,c} = \sigma_C = -\frac{N}{A} - \frac{M_{iz}}{A \cdot e} \cdot \frac{y_C}{r_C} = \sigma_{ac} \qquad 4.2.3\text{-}5b$$

- Se calculează mărimile din relațiile 4.2.3-5a,b:

  $A = 1.600\ mm^2$

$$e \approx \frac{I_z}{A \cdot R} \approx 1 \text{ mm}$$

$y_T = 35 + e = 36$ mm

$y_C = y_G - e = 25 - 1 = 24$ mm

$r_T = r + 60 = 275 + 60 = 335$ mm

$r_C = r = 275$ mm

- Cu aceste valori, relațiile 4.2.3-5a,b, devin:

$$-\frac{2p \cdot 300}{1.600} + \frac{4p \cdot 300^2}{1.600 \cdot 1} \cdot \frac{36}{335} = 30 \qquad 4.2.3\text{-}6a$$

$$-\frac{2p \cdot 300}{1.600} + \frac{4p \cdot 300^2}{1.600 \cdot 1} \cdot \frac{24}{275} = -90 \qquad 4.2.3\text{-}6b$$

- Rezolvând ecuațiile 4.2.3-6a,b, se obțin valorile:

p' = 1,24 kN/m

p'' = 4,58 kN/m

de unde rezultă sarcina capabilă:

$$p_{cap} = \min(p' ; p'') = 1{,}24 \text{ kN/m} \qquad 4.2.3\text{-}7$$

- Variația tensiunii normale din secțiunea periculoasă, este prezentată în Fig.4.2.3-5.

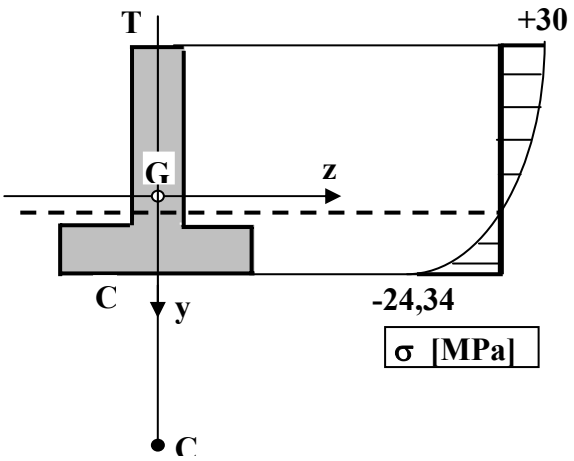


Fig.4.2.3-5

Pentru toate exemplele prezentate până acum, excentricitatea **e** a fost calculată cu relația aproximativă:

$$e \approx \frac{I_z}{A \cdot R} \qquad 4.2.3\text{-}8$$

Să calculăm acum mărimea excentricității **e** cu relația exactă (pentru a vedea ce diferență rezultă între cele două procedee):

$$e = R - r_n \qquad 4.2.3\text{-}8$$

unde:

r_n - se calculează cu relația (vezi Tabelul 4.1-1, poziția 3 particularizată şi Fig.4.2.3-6):

$$r_n = \frac{A}{b_1 \cdot \ln\frac{R_2}{R_1} + b_2 \cdot \ln\frac{R_3}{R_2}} \qquad 4.2.3\text{-}9$$

iar:

$b_1 = 40$ mm $\quad b_2 = 20$ mm

$R_1 = 275$ mm $\quad R_2 = 295$ mm $\quad R_3 = 335$ mm

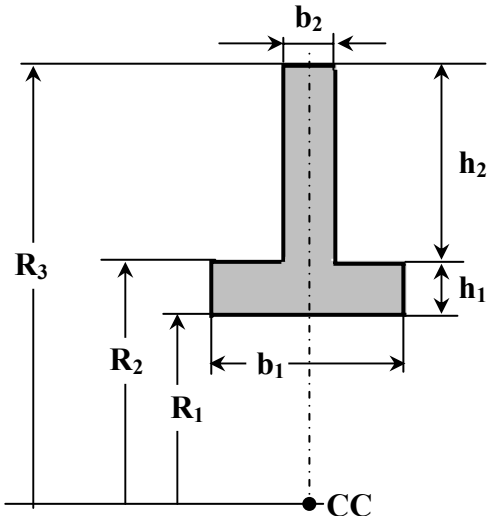


Fig.4.2.3-6

Introducând aceste mărimi în relația 4.2.3-9, se obține:

$$r_n = \frac{2 \cdot 20 \cdot 40}{40 \cdot \ln \frac{295}{275} + 20 \cdot \ln \frac{335}{295}} = 299{,}00375 \quad \text{mm} \qquad 4.2.3\text{-}10$$

Din relația 4.2.3-8, rezultă mărimea excentricității **e**:

$$e = R - r_n = 300 - 299{,}00375 = 0{,}996 \qquad 4.2.3\text{-}11$$

Se poate constata că diferența este foarte mică, ceea ce permite să se utilizeze relația aproximativă pentru excentricitatea **e**.

5. CALCULUL LA FLAMBAJ (STABILTATE) AL BARELOR DREPTE ZVELTE, SOLICITATE LA COMPRESIUNE

5.1 Considerații generale. Etape de calcul

Flambajul *este fenomenul de trecere a unei piese din starea de echilibru stabil în cea de echilibru instabil, la o anumită valoare (critică) a sarcinilor aplicate.*

Flambajul mai este cunoscut şi sub denumirea de *fenomen de pierdere a stabilității* unei piese (element de rezistență).

Flambajul este un fenomen şi nu o solicitare, el apărând numai pentru anumite elemente de rezistență, solicitate într-un anumit mod.

Valoarea critică a sarcinii aplicate, numită şi *forță critică de flambaj* (F_{cr}), depinde de forma şi dimensiunile elementului de rezistență, de modul de rezemare şi aplicare al sarcinilor.

Atingerea valorii forței critice de flambaj într-un element de rezistență reprezintă o stare periculoasă, iar elementul de rezistență nu mai poate fi utilizat.

Calculul de flambaj al unui element de rezistență constă în determinarea valorii forței critice şi alegerea unei forțe reale mai mică de c_f ori, unde c_f poartă numele de *coeficient de siguranță la flambaj.*

Se va prezenta numai flambajul barelor drepte zvelte (lungi şi subțiri) supuse solicitării axiale de compresiune.

Relația de bază (fundamentală) pentru calculul la flambaj, este:

$$c_f = \frac{F_{cr}}{N_{ef}} \leq c_{af} \qquad 5.1\text{-}1$$

unde:

F_{cr} - forța critică de flambaj

N_{ef} - efortul axial efectiv de compresiune din bară

c_{af} - coeficientul de siguranță admisibil la flambaj.

Valorile coeficientului de siguranță admisibil c_{af} sunt variate şi nu există prescripții oficiale pentru ele. În general c_{af} se ia din diferite tratate de construcții de maşini. Pentru piese de maşini, valorile extreme ale coeficientul de siguranță admis la flambaj sunt:

$$c_{af,min} = 4$$
$$c_{af,max} = 28$$

În Tabelul 5.1-1, sunt prezentate câteva valori ale lui c_{af} pentru tije de piston şi biele.

Tabelul 5.1-1

Piesa		$\mathbf{c_{af}}$
Tija pistonului	Maşini cu un cilindru	8 ... 12
	Maşini cu un cilindru şi contratijă; maşini cu doi cilindri	4 ... 8
Biela	Maşini termice mari	14 ... 28
	Motoare de automobil	4 .. 5,5

Este cunoscut faptul că flambajul unui element de rezistență poate avea loc în trei domenii: elastic, elasto - plastic şi plastic, primele două fiind cele mai importante. Ca urmare, fiecărui domeniu de flambaj, îi corespunde o anumită expresie pentru forța critică de flambaj.

Astfel:

✓ pentru domeniul elastic (formula lui Euler):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2} \qquad 5.1\text{-}2$$

unde:

E - modulul de elasticitate longitudinal al materialului elementului de rezistență

I_{min} - momentul de inerție axial minim al secțiunii transversale a elementului de rezistență

l_f - lungimea de flambaj, care depinde de modul de rezemare al elementului de rezistență.

În Fig.5.1-1 se prezintă cele mai frecvente moduri de rezemare a elementului de rezistență şi relația lungimii de flambaj l_f, pentru fiecare mod:

a) bara articulată la ambele capete
b) bara înțepenită la un capăt şi liberă la celălalt
c) bara înțepenită la un capăt şi articulată la celălalt
d) bara înțepenită la ambele capete.

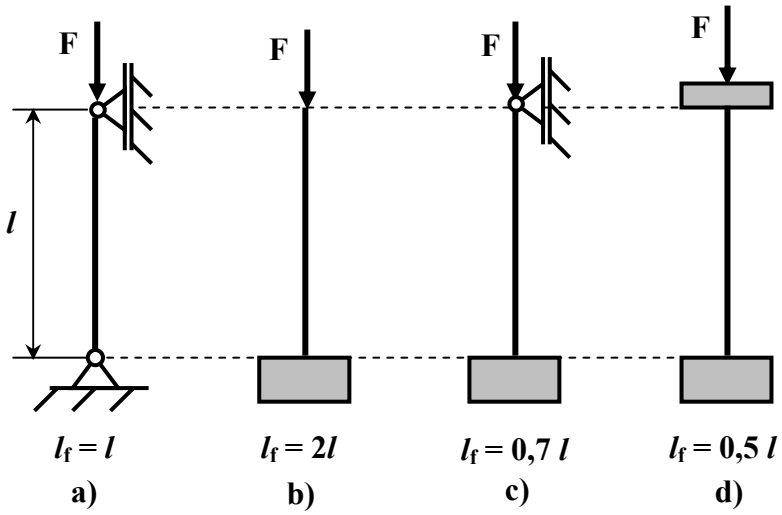


Fig.5.1-1

✓ pentru domeniul elasto - plastic (relația lui Tetmajer - Iasinski):

$$F_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} \qquad 5.1\text{-}3$$

unde:

A - aria secțiunii transversale a barei
σ_{cr} - o tensiune critică a cărei expresie are forma:

➢ pentru oțel:

$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda \qquad 5.1\text{-}4a$$

➢ pentru fontă:

$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda - c \cdot \lambda^2 \qquad 5.1\text{-}4b$$

iar,

a, b, c - coeficienți determinați experimental
λ - coeficient de zveltețe, cu expresia:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} \qquad 5.1\text{-}5$$

şi

i_{min} - raza de giraţie minimă a secţiunii transversale a barei.

Delimitarea domeniilor (elastic, elasto - plastic, plastic) se face pe baza coeficientului de zveltețe (coeficientul de subțirime) λ. În Fig.5.1-2 se prezintă o schemă de delimitare a domeniilor de flambaj, funcție de coeficientul de zveltețe λ.

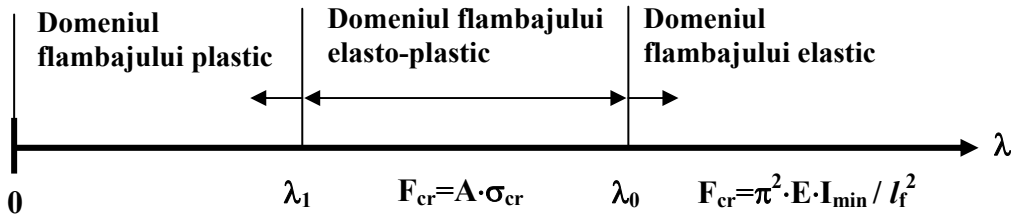


Fig.5.1-2

Valorile coeficienților a, b, c, λ_0, λ_1 pentru câteva materiale utilizate în construcția de maşini, sunt prezentate în Tabelul 5.1-2.

Din cele prezentate până acum a rezultat că pentru calculul la flambaj există două relații (relația 5.1-2 şi 5.1-3), pentru domeniul elastic, respectiv elasto - plastic.

În domeniul construcțiilor pentru care se poate admite $c_{af,min}$ = 1,7 şi $c_{af,max}$ = 2,4 s-a stabilit o metodă de calcul unică, atât pentru flambajul elastic cât şi cel plastic. Această metodă este cunoscută sub numele de *metoda coeficientului de flambaj* φ.

În metoda coeficientului de flambaj φ, *rezistența admisibilă la flambaj* se defineşte ca fiind:

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c} = \frac{F_{cr}}{A \cdot c} = \frac{F_{cr}}{c} \cdot \frac{1}{A} = \frac{N_{ef}}{A} \qquad 5.1\text{-}6$$

În acest fel, calculul la flambaj devine un calcul de forma celui de la compresiune, adică:

$$A = \frac{F}{\sigma_{af}} \qquad 5.1\text{-}7$$

Tabelul 5.1-2

Materialul	a	b	c	λ_0	λ_1
OL 37 (σ_c = 240 MPa)	304.00	1,12	-	105.00	60.00
Oțel σ_r = 480 MPa σ_c = 310 MPa	460.00	2,57	-	100.00	60.00
Oțel σ_r = 520 MPa σ_c = 360 MPa	577.00	3,74	-	100.00	60.00
Oțel cu 50 % nichel	461.00	2,25	-	86.00	0.00
Oțel crom - molibden	980.00	5,3	-	55.00	0.00
Duraluminiu	372.00	2,14	-	50.00	0.00
Fontă	776.00	12.00	0,053	80.00	0.00
Lemn	28,7	0,19	-	100.00	0.00

Mărimea σ_{af} , rezultă din valoarea lui σ_{cr} variabilă cu λ, împărțită cu un coeficient de siguranță c_f, variabil şi el cu λ.

Se introduce un ***coeficient de flambaj*** φ, definit de relația:

$$\varphi = \frac{\sigma_{af}}{\sigma_a} < 1 \qquad 5.1\text{-}8$$

unde:

σ_a - tensiunea admisibilă la compresiune simplă.

Acum, relația 5.1-7 pentru flambaj, capătă forma:

$$A = \frac{N_{ef}}{\varphi \cdot \sigma_a} = \ldots \qquad 5.1\text{-}9$$

care pentru probleme de verificare şi efort capabil la flambaj, este:

$$\sigma_{ef} = \frac{N_{ef}}{\varphi \cdot A} \le \sigma_a \qquad 5.1\text{-}10$$

În Tabelul 5.1-3 se prezintă valorile coeficientului de flambaj φ pentru OL37, iar în Tabelul 5.1-4, pentru lemn şi fontă, funcție de coeficientul de zveltețe λ.

Tabelul 5.1-3

λ	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00
0.00	1,000	0,996	0,992	0,987	0,983	0,979	0,975	0,971	0,967	0,963
10.00	0,960	0,956	0,952	0,948	0,944	0,941	0,937	0,933	0,930	0,926
20.00	0,922	0,919	0,915	0,912	0,908	0,904	0,901	0,897	0,894	0,890
30.00	0,886	0,883	0,879	0,876	0,872	0,868	0,865	0,861	0,857	0,853
40.00	0,850	0,847	0,843	0,839	0,836	0,832	0,828	0,825	0,821	0,817
50.00	0,814	0,810	0,806	0,802	0,799	0,795	0,791	0,788	0,784	0,780
60.00	0,776	0,772	0,769	0,765	0,761	0,757	0,753	0,749	0,745	0,741
70.00	0,737	0,734	0,729	0,725	0,721	0,717	0,713	0,709	0,705	0,701
80.00	0,696	0,692	0,688	0,683	0,679	0,674	0,670	0,665	0,660	0,656
90.00	0,651	0,646	0,641	0,636	0,630	0,625	0,619	0,613	0,607	0,600
100.00	0,593	0,585	0,577	0,567	0,555	0,545	0,535	0,525	0,515	0,506
110.00	0,496	0,488	0,479	0,470	0,462	0,454	0,446	0,439	0,431	0,424
120.00	0,417	0,410	0,403	0,397	0,391	0,384	0,378	0,372	0,367	0,361
130.00	0,355	0,350	0,345	0,340	0,335	0,330	0,325	0,320	0,315	0,311
140.00	0,306	0,302	0,298	0,294	0,290	0,286	0,282	0,278	0,274	0,271
150.00	0,267	0,263	0,260	0,257	0,253	0,250	0,247	0,244	0,241	0,238
160.00	0,235	0,232	0,229	0,226	0,223	0,221	0,218	0,215	0,213	0,210
170.00	0,208	0,205	0,203	0,201	0,198	0,196	0,194	0,192	0,190	0,187
180.00	0,185	0,183	0,181	0,179	0,177	0,175	0,174	0,172	0,170	0,168
190.00	0,166	0,165	0,163	0,161	0,160	0,158	0,156	0,155	0,153	0,152
200.00	0,150	0,149	0,147	0,146	0,144	0,143	0,142	0,140	0,139	0,137
210.00	0,136	0,135	0,134	0,132	0,131	0,130	0,129	0,128	0,126	0,125
220.00	0,124	0,123	0,122	0,121	0,120	0,119	0,118	0,117	0,116	0,115
230.00	0,114	0,113	0,112	0,111	0,110	0,109	0,108	0,107	0,106	0,105
240.00	0,104	0,103	0,103	0,102	0,101	0,100	0,099	0,098	0,098	0,097
250.00	0,096	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabelul 5.1-4

λ	Lemn	Fontă	λ	Lemn	Fontă
0.00	1,00	1,00	80.00	0,48	0,26
10.00	0,99	0,97	90.00	0,38	0,20
20.00	0,97	0,91	100.00	0,30	0,16
30.00	0,93	0,81	110.00	0,25	-
40.00	0,87	0,69	120.00	0,22	-
50.00	0,80	0,57	130.00	0,18	-
60.00	0,71	0,44	140.00	0,16	-
70.00	0,61	0,34	150.00	0,14	-

Pentru rezolvarea la flambaj a barelor drepte zvelte, se parcurg următoarele **etape**:

- Mai întâi trebuie stabilite elementele care pot să-şi piardă stabilitatea, adică să flambeze. Fenomenul de flambaj apare

la barele zvelte solicitate la compresiune (acest caz a fost tratat până acum).

- Se determină eforturile axiale de compresiune (vezi calculul sistemelor de bare articulate etc.) din elementele sistemului.
- Dacă barele solicitate la compresiune sunt zvelte, acestora pe lângă calculul de rezistență li se face şi calculul la flambaj.
- Se stabileşte tipul de problemă (verificare, dimensionare, efort capabil) şi condițiile impuse (de rezistență, stabilitate sau ambele).
- Pentru flambaj, se scrie relația fundamentală de calcul (relația 5.1-1).
- Se calculează lungimea de flambaj l_f.

a) *Pentru problemele de verificare sau efort capabil*, se parcurg următoarele **etape**:

- Se calculează raza de giație minimă i_{min} şi se stabileşte domeniul de flambaj determinând valoarea lui λ cu relația 5.1-5 (vezi şi Fig.5.1-1).
- În funcție de domeniul de flambaj stabilit, se scrie relația pentru forța critică de flambaj F_{cr} (rel. 5.1-2 sau 5.1-3).
- Se particularizează F_{cr} şi se introduce în relația de bază 5.1-1, care în funcție de tipul problemei se particularizează pentru c_{af}.
- Din această ultimă relație, se determină mărimea neunoscută (coeficient de siguranță la flambaj c_f sau efortul capabil).

b) *Pentru problemele de dimensionare*, se parcurg **etapele**:

- Se calculează forța critică de flambaj F_{cr} cu relația lui Euler (rel. 5.1-2).
- Se introduce expresia lui F_{cr} în relația de bază (rel. 5.1-1) egalată cu c_{af}.
- Din relația rezultată se exprimă $I_{min,nec}$ şi în funcție de forma secțiunii, se determină dimensiunea secțiunea transversale a barei.

* Se verifică acum domeniul de flambaj. Se calculează raza de giație minimă i_{min} şi coeficientul de zveltețe efectiv λ_{ef} (cu dimensiunea secțiunii transversale determinată anterior).

- Se compară λ_{ef} cu λ_0 sau cu λ_1 şi:
  - dacă $\lambda_{ef} \geq \lambda_0$ dimensiunea secţiunii transversale determinată anterior este bună şi se adoptă această dimensiune
  - dacă $\lambda_1 < \lambda_{ef} < \lambda_0$ se calculează F_{cr} cu relaţia 5.1-3 şi cu această valoare, se calculează în continuare coeficientul de siguranţă la flambaj c_f cu relaţia 5.1-1, iar
  - dacă $c_f \geq c_{af}$ dimensiunea determinată mai devreme se acceptă
  - dacă $c_f < c_{af}$ se măreşte dimensiunea determinată şi se reia calculul de la etapa însemnată cu *. Calculul se continuă până când se ajunge în situaţia]n care dimensiunea determinată se acceptă.

Dacă se efectuează calculul la flambaj prin *metoda coeficientului de flambaj* φ, se parcurg **etapele**:

- Se determină eforturile axiale N din barele sistemului.
- Se stabilesc elementele susceptibile la flambaj.
- Se stabileşte tipul de problemă.
- Se calculează l_f, i_{min} şi λ_{ef} (pentru probleme de verificare sau încărcare capabilă)
- În funcţie de λ_{ef} din Tabelul 5.1-3, respectiv Tabelul 5.1-4 (sau altele corespunzătoare) se determină coeficientul de flambaj φ.
- Valoarea coeficientului de flambaj se introduce în relaţia 5.1-10, de unde rezultă mărimea necunoscută (tensiune maximă sau efort capabil).

Pentru problemele de dimensionare, metoda coeficientului de flambaj φ este mai dificil de utilizat, deoarece necunoscându-se dimensiunea secţiunii transversale nu se poate calcula valoarea lui i_{min}, deci nici a lui λ_{ef} şi ca urmare nu se poate alege o valoare pentru coeficientul de flambaj φ. Totuşi, pentru problemele de dimensionare, se poate face pentru început un calcul aproximativ de stabilire a ariei necesare din condiţia de rezistenţă numai pe baza solicitării la

compresiune simplă, urmat apoi din aproape în aproape de un calcul la flambaj, până când relația 5.1-10 este îndeplinită.

5.2 Modele de probleme rezolvate

5.2.1 *Să se determine forța capabilă pe care o poate suporta sistemul din Fig. 5.2.1-1 ştiind că bara orizontală are rigiditate mare. Se cunosc:* σ_a *= 150 MPa,* c_{af} *= 3, E = 2,1 ·* 10^5 *MPa,* σ_{cr} *= 310 - 1,14* λ*. d = 20 mm, D = 30 mm, k = d/D =0,66, a = 0,75 m.*

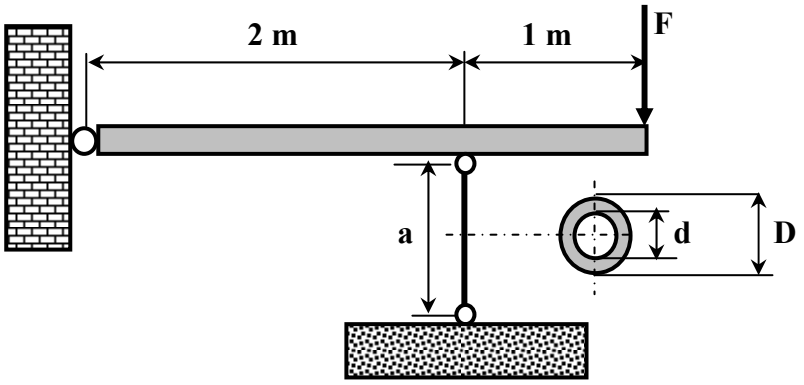


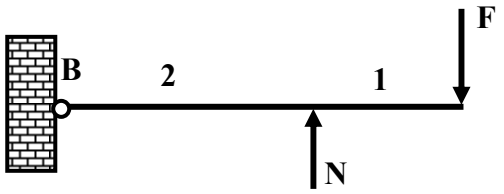
Fig.5.2.1-1

Rezolvare:

Se parcurg etapele recomandate pentru această categorie de probleme.

- Stâlpul de susținere al barei orizontale fiind zvelt şi solicitat la compresiune, poate să-şi piardă stabilitatea (să flambeze).
- Se determină efortul axial N din stâlp (vezi schema din Fig.5.2.1-2 pe bază căreia se determină efortul axial).

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \Rightarrow N \cdot 2 - F \cdot 3 = 0$$



de unde:

Fig.5.2.1-22

$$N = \frac{3}{2} \cdot F = 1{,}5\,F \qquad 5.2.1\text{-}1$$

Sensul real al efortului axial N, confirmă ipoteza de mai înainte că stâlpul este solicitat la compresiune.

- Problema este de efort capabil.
- Relația fundamentală (de bază) de calcul, pentru probleme de efort capabil, este:

$$\frac{F_{cr}}{N_{ef}} = c_{af} \qquad 5.2.1\text{-}2$$

- Bara este articulată la ambele capete, rezultând din Fig.5.1-1 (cazul a):

$$l_f = a = 0{,}75 \ \text{m} \qquad 5.2.1\text{-}3$$

şi

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = 8{,}988 \ \text{mm} \qquad 5.2.1\text{-}4$$

de unde rezultă acum coeficientul de zveltețe λ:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{750}{8{,}988} = 83{,}44 < \lambda_0 = 105 \qquad 5.2.1\text{-}5$$

Rezultă că la o eventuală atingere a forței critice de flambaj, stâlpul de susținere va flamba în domeniul elasto-plastic.

- Se calculează forța critică de flambaj, cu relația 5.1-3:

$$F_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \left(1 - k^2\right) \cdot \left(310 - 1{,}14 \cdot \lambda\right) =$$

$$= \frac{\pi \cdot 30^2}{4} \cdot \left(1 - 0{,}66^2\right) \cdot \left(310 - 1{,}14 \cdot 83{,}44\right) = 85{,}726 \ \text{kN} \qquad 5.2.1\text{-}6$$

- Forța critică de flambaj determinată, se introduce în relația 5.2.1-2 şi ținând seama şi de efortul axial N, se obține:

$$\frac{85.726}{1,5 \cdot F} = 3 \qquad 5.2.1\text{-}7$$

de unde se calculează valoarea forței capabile:

$$F_{1cap} = \frac{85.726}{1,5 \cdot 3} = 19.050 \text{ N} \approx 19,05 \text{ kN} \qquad 5.2.1\text{-}8$$

Deoarece în enunțul problemei se dă şi tensiunea normală admisibilă σ_a, înseamnă că trebuie făcut şi calculul de rezistență.

Etapele pentru acest calcul sunt cele cunoscute deja:

$$\frac{N}{A} = \sigma_a \qquad 5.2.1\text{-}9$$

sau după înlocuiri:

$$\frac{1,5 \cdot F}{A} = \sigma_a$$

de unde rezultă forța capabilă F_2:

$$F_{2cap} = \frac{A \cdot \sigma_a}{1,5} \approx 39,89 \text{ kN} > F_{1cap} \qquad 5.2.1\text{-}10$$

Forța capabilă pentru întregul sistem, este:

$$F_{cap} = F = \min (F_{1,cap} ; F_{2,cap}) = 19,05 \text{ KN}$$

şi a rezultat din condiția de stabilitate (flambaj).

5.2.2 *Să se dimensioneze barele de oțel din Fig.5.2.2-1, pentru care se cunosc:* $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ *MPa*, $\sigma_a = 150$ *MPa*, $c_{af} = 3$, $\alpha = 30^0$, $h = 2$ *m*.

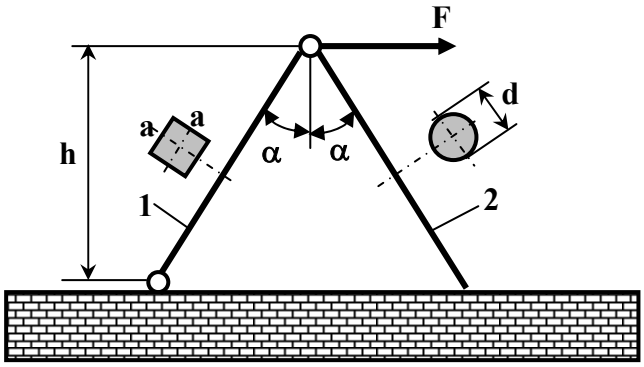


Fig.5.2.1-1

Rezolvare:

♦ Bara 1 este solicitată la întindere, iar bara 2 la compresiune. Bara 2 este zveltă, deci poate flamba.

♦ Eforturile axiale din cele două bare se determină cu ajutorul schemei din Fig.5.2.2-2.

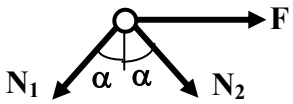


Fig.5.2.2-2

$$\left(\sum F\right)_x = 0 \Rightarrow N_1 \cdot \sin\alpha + N_2 \cdot \sin\alpha = F$$

$$\Rightarrow N_1 + N_2 = 2 \cdot F \qquad 5.2.2\text{-}1a$$

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \Rightarrow N_1 \cdot \cos\alpha - N_2 \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_1 = N_2 \qquad 5.2.2\text{-}1b$$

Din relațiile 5.2.2-1a şi 5.2.2-1b, se obține:

$$N_1 = N_2 = F = 10 \text{ KN} \qquad 5.2.2\text{-}1c$$

♦ La flambaj se va calcula numai bara 2.

- Problema este de dimensionare, condiția de stabilitate şi rezistență.
- Relația de bază pentru flambaj, este:

$$\frac{F_{cr}}{N_2} = c_{af} \qquad 5.2.2\text{-}2$$

- Lungimea de flambaj l_f (vezi Fig.5.1-1, cazul c), este:

$$l_f = 0{,}7 \cdot l = 0{,}7 \cdot \frac{h}{\cos\alpha} = 1.616 \ \text{mm} \qquad 5.2.2\text{-}3$$

- Pentru problemele de dimensionare, se calculează F_{cr} cu relația 5.1-2:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2} \qquad 5.2.2\text{-}4$$

care se introduce în relația 5.2.2-2, rezultând:

$$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2 \cdot N_2} = c_{af} \qquad 5.2.2\text{-}5a$$

de unde

$$I_{min,nec} = \frac{l_f^2 \cdot N_2 \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \qquad 5.2.2\text{-}5b$$

obținându-se diametrul barei:

$$d_1 = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot l_f^2 \cdot N_2 \cdot c_{af}}{\pi^3 \cdot E}} \approx 22 \ \text{mm} \qquad 5.2.2\text{-}5c$$

- Cu această valoare pentru diametrul barei, se verifică domeniul (presupus inițial a fi cel elastic):

➢ se calculează λ_{ef}

$$\lambda_{ef} = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{l_f}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}} = 293{,}818 > \lambda_0 = 105 \qquad 5.2.2\text{-}6$$

Cum se verifică domeniul de flambaj (cel elastic), rezultă că pentru condiția de stabilitate se acceptă această dimensiune:

$$d_1 = 22 \ \text{mm} \qquad 5.2.2\text{-}7$$

♦ Tot pentru bara 2, se calculează un diametru necesar şi din condiția de rezistență:

$$A_{2nec} = \frac{N_2}{\sigma_a} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \qquad 5.2.2\text{-}8$$

de unde se obține:

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot N_2}{\pi \cdot \sigma_a}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 10^3}{\pi \cdot 150}} \approx 10 \ \text{mm} \qquad 5.2.2\text{-}9$$

Pentru bara 2, rezultă în final diametrul secțiunii transversale:

$$d = \max(d_1 ; d_2) = 22 \ \text{mm} \qquad 5.2.2\text{-}10$$

şi a rezultat tot din condiția de stabilitate.

♦ **Bara 1** este solicitată la întindere, deci se dimensionează numai din condiția de rezistență:

$$A_{1nec} = \frac{N_1}{\sigma_a} = a^2 \qquad 5.2.2\text{-}11$$

de unde se obține dimensiunea secțiunii transversale:

$$a = \sqrt{\frac{N_1}{\sigma_a}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 10^3}{150}} \approx 9 \text{ mm} \qquad 5.2.2\text{-}12$$

Observație: sensul rezultat pentru eforturile axiale (vezi rezultatele de la relația 5.2.2-1c şi Fig.5.2.2-2), confirmă că bara 1 este solicitată la întindere, iar bara 2 la compresiune.

5.2.3 *Să se dimensioneze o bară de oțel de secțiune circulară cu diametrul d, comprimată de o forță F = 135 KN, bara este articulată la ambele capete (Fig.5.2.3-1), iar lungimea ei poate fi:*

a) a = *2 m*

b) a = *0,8 m*

Se cunosc: $c_{af} = 3$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\,\lambda$, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ *MPa.*

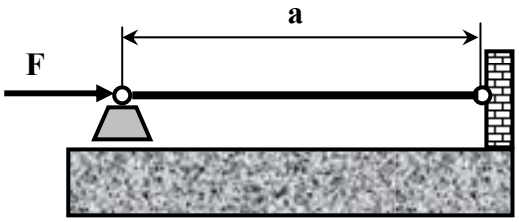


Fig.5.2.3-1

Rezolvare:

- Bara este zveltă şi solicitată la compresiune, putând în aceste condiții să-şi piardă stabilitatea.
- Efortul axial din bară este:

$$N = F = 135 \text{ KN} \qquad 5.2.3\text{-}1$$

- Problema este de dimensionare, condiția de stabilitate.
- Relația fundamentală de calcul este:

$$\frac{F_{cr}}{N} = c_{af} \qquad 5.2.3\text{-}2$$

- Lungimea de flambaj l_f este:

$$l_f = a \qquad 5.2.3\text{-}3$$

♦ Forța critică are expresia (problemă de dimensionare):

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2} \qquad 5.2.3\text{-}4a$$

care introdusă în relația 5.2.3-2, rezultă:

$$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2 \cdot N} = c_{af} \qquad 5.2.3\text{-}4b$$

de unde

$$I_{min,nec} = \frac{l_f^2 \cdot N \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \qquad 5.2.3\text{-}4c$$

iar

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot l_f^2 \cdot N \cdot c_{af}}{\pi^3 \cdot E}} \qquad 5.2.3\text{-}4d$$

Cazul a) a = 2 m.
Din relația 5.2.3-4d se obține:

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot \left(2 \cdot 10^3\right)^2 \cdot 135 \cdot 10^3 \cdot 3}{\pi^3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5}} \approx 63 \ \text{mm} \qquad 5.2.3\text{-}5$$

♦ Se verifică domeniul de flambaj:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{l_f}{\frac{d}{4}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^3}{63} = 126{,}98 > \lambda_0 = 105 \qquad 5.2.3\text{-}6$$

Se verifică domeniul de flambaj, acceptându-se dimensiunea secțiunii transversale a barei:

$$d = 63 \text{ mm}$$

Cazul b) a = 0, 8 m = 800 mm

Din relația 5.2.3-4d, se obține diametrul secțiunii:

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot \left(0{,}8 \cdot 10^3\right)^2 \cdot 135 \cdot 10^3 \cdot 3}{\pi^3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5}} \approx 40 \text{ mm} \qquad 5.2.3\text{-}7$$

♣Verificăm domeniul de flambaj:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{l_f}{\frac{d}{4}} = \frac{4 \cdot 800}{40} = 80 < \lambda_0 = 105 \qquad 5.2.3\text{-}8$$

- Nu se verifică domeniul de flambaj. Cu această dimensiune pentru diametrul d, bara va flamba în domeniul elasto-plastic.
- Se verifică dacă este satisfăcută valoarea coeficientului de siguranță la flambaj:
  - se calculează

$$F_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} = \frac{\pi \cdot 40^2}{4} \cdot \left(310 - 1{,}14 \cdot 80\right) = 274{,}952 \text{ kN} \qquad 5.2.3\text{-}9$$

  - se calculează coeficientul de siguranță la flambaj

$$c_f = \frac{F_{cr}}{N} = \frac{274{,}052}{135} = 2{,}03 < c_{af} = 3 \qquad 5.2.3\text{-}10$$

Nu se atinge valoarea coeficientului de siguranță admis.

  - se mărește secțiunea adoptând d = 45 mm şi se reia calculul de la punctul cu semnul ♣ (vezi şi etapele indicate)
- Se calculează

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{l_f}{\frac{d}{4}} = \frac{4 \cdot 800}{45} = 71{,}1 < \lambda_0 = 105$$

rezultă tot domeniul elasto-plastic de flambaj

- se calculează

$$F_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} = \frac{\pi \cdot 45^2}{4} \cdot (310 - 1{,}14 \cdot 71{,}1) = 287{,}7 \text{ kN}$$

- coeficientul de siguranță la flambaj este

$$c_f = \frac{F_{cr}}{N} = \frac{287{,}7}{135} = 2{,}13 < c_{af} = 3$$

Tot nu se atinge valoarea minimă admisă.

- Se măreşte din nou secțiunea adoptând d = 48 mm şi se reia calculul de la punctul
  - se calculează

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{l_f}{\frac{d}{4}} = \frac{4 \cdot 800}{48} = 66{,}66 < \lambda_0 = 105$$

Rezultă tot domeniul elesto-plastic de flambaj.

- se calculează

$$F_{cr} = A \cdot \sigma_{cr} = \frac{\pi \cdot 48^2}{4} \cdot (310 - 1{,}14 \cdot 66{,}66) = 423{,}45 \text{ kN}$$

- se calculează coeficientul de siguranță la flambaj

$$c_f = \frac{F_{cr}}{N} = \frac{423{,}45}{135} = 3{,}13 > c_{af} = 3$$

Abia acum este atinsă valoarea minimă admisă pentru coeficientul de siguranță la flambaj. Se poate admite pentru diametrul barei în această variantă, valoarea:

$$d = 48 \text{ mm}$$

Cum în enunțul problemei nu se indică tensiunea normală maximă admisă, nu se mai face şi un calcul din condiția de rezistență.

5.2.4 *Să se dimensioneze barele sistemului din Fig.5.2.4-1 pentru care se cunosc: p = 24 KN/m,* a_1 *= 1,2 m,* a_2 *= 1,8 m,* c_{af} *= 3, E = 2.1 · 10*^{5} *MPa,* $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\ \lambda$*, iar bara verticală are rigiditate foarte mare.*

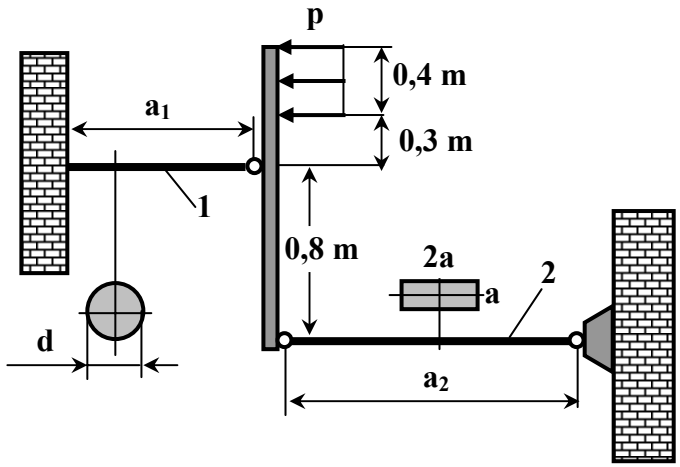


Fig.5.2.4-1

Rezolvare:

- Barele 1 şi 2 sunt solicitate la compresiune şi pot să-şi piardă stabilitatea.
- Pe schema din Fig.5.2.4-2 se determină eforturile axiale din cele două bare.

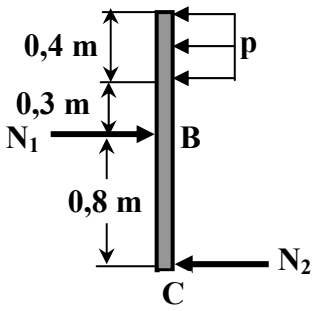


Fig.5.2.4-2

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \Rightarrow N_2 \cdot 0{,}8 = p \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \Rightarrow N_2 = 6 \text{ kN} \qquad 5.2.4\text{-}1a$$

$$\left(\sum M\right)_C = 0 \Rightarrow N_1 \cdot 0{,}8 = p \cdot 0{,}4 \cdot 1{,}3 \Rightarrow N_1 = 15{,}6 \text{ kN} \qquad 5.2.4\text{-}1b$$

Orientarea eforturilor N_1 şi N_2 confirmă ipoteza iniţială că barele sunt solicitate la compresiune.

- Problema este de dimensionare, condiţia de stabilitate.
- Lungimea de flambaj pentru cele două bare este:
  - pentru bara 1: $l_{f1} = 0{,}7a_1 = 0{,}84$ m (Fig.5.1-1c) 5.2.4-2a
  - pentru bara 2: $l_{f2} = a_2 = 1{,}8$ m (Fig.5.1-1a). 5.2.4-2b
- Relaţia fundamentală de calcul este:

$$\frac{F_{cr}}{N} = c_{af} \qquad 5.2.4\text{-}3$$

- Relaţia pentru F_{cr} în cazul problemelor de dimensionare este:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2} \qquad 5.2.4\text{-}4$$

care înlocuită în relaţia 5.2.4-3, conduce la:

$$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2} = c_{af} \qquad 5.2.4\text{-}5$$

de unde

$$I_{min,nec} = \frac{l_f^2 \cdot N \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E} \qquad 5.2.4\text{-}6$$

Pentru cele două bare, relația 5.2.4-6 capătă forma:

- pentru bara 1

$$I_{min,nec} = \frac{l_{f1}^2 \cdot N_1 \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \qquad 5.2.4\text{-}7a$$

- pentru bara 2

$$I_{min,nec} = \frac{l_{f2}^2 \cdot N_2 \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E} = \frac{a^3 \cdot 2a}{12} = \frac{a^4}{6} \qquad 5.2.4\text{-}7b$$

Din relațiile 5.2.4-7a,b rezultă dimensiunea secțiunii transversale a fiecărei bare.

Astfel:

- pentru bara 1

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot l_{f1}^2 \cdot N_1 \cdot c_{af}}{\pi^3 \cdot E}} \qquad 5.2.4\text{-}8a$$

- pentru bara 2

$$a = \sqrt[4]{\frac{6 \cdot l_{f2}^2 \cdot N_2 \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E}} \qquad 5.2.4\text{-}8b$$

Ținând seama de valorile numerice ale mărimilor care intervin în relațiile 5.2.4-8a,b se obține:

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 840^2 \cdot 15{,}6 \cdot 10^3 \cdot 3}{\pi^3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5}} \approx 24 \ \text{mm} \qquad 5.2.4\text{-}9a$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{6 \cdot 1.800^2 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 3}{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5}} \approx 21 \text{ mm} \qquad 5.2.4\text{-}9b$$

✓ Se verifică acum domeniul de flambaj.

➢ pentru bara 1

$$\lambda = \frac{4 \cdot l_{f1}}{d} = \frac{4 \cdot 840}{24} = 140 > \lambda_0$$

ceea ce însemnă că se verifică domeniul de flambaj şi se adoptă dimensiunea rezultată prin calcul:

d = 24 mm

➢ pentru bara 2

$$\lambda = \frac{l_{f2}}{\sqrt{\frac{\frac{a^4}{6}}{2a \cdot a}}} = \frac{l_{f2}}{\sqrt{\frac{a^2}{12}}} = \frac{1.800}{\sqrt{\frac{21^2}{12}}} = 296{,}9 > \lambda_0$$

Şi pentru bara 2 se verifică domeniul elastic de flambaj şi ca urmare se acceptă dimensiunea calculată:

a = 21 mm.

Deci pentru cele două bare, au rezultat dimensiunile secțiunii transversale:

➢ pentru bara 1, d = 24 mm
➢ pentru bara 2, a = 21 mm.

5.2.5 *Pentru bara din oțel de secțiune circulară cu diametrul d = 120 mm (Fig.5.2.5-1) se cere să se determine diferența de*

temperatură la care poate fi supusă bara, astfel încât aceasta să nu-şi piardă stabilitatea (să nu flambeze). Pentru materialul barei se cunosc: $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ *grad*$^{-1}$, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ *MPa.*

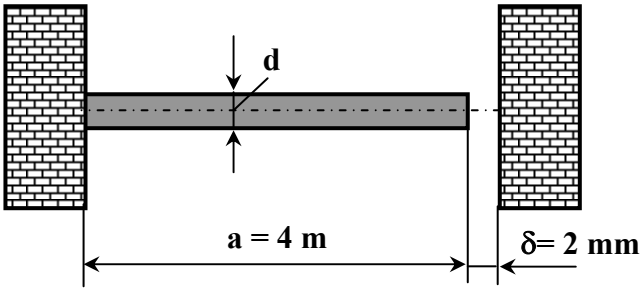


Fig.5.2.5-1

Rezolvare:

- Dacă bara se încălzeşte cu Δt grade, ea se dilată şi ajungând în peretele din dreapta, va fi supusă la compresiune. Temperatura va creşte până când în bară, efortul axial N atinge valoarea forţei critice F_{cr} (vezi enunţul). Pentru acest caz, coeficientul de siguranţă la flambaj este egal cu unitatea (unu).
- Efortul axial N din bară se determină cu ajutorul schemei privind deformarea barei (Fig.5.2.5-2), sistemul fiind static nedeterminat o dată.

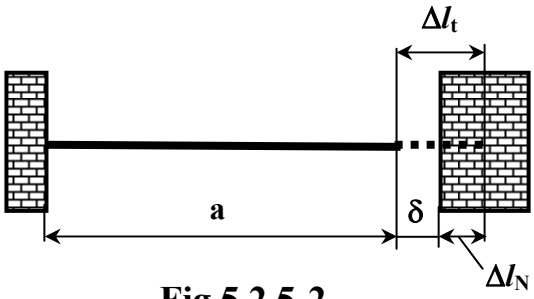


Fig.5.2.5-2

- Din Fig.5.2.5-2 se poate scrie

$$\Delta l_t = \delta + \Delta l_N \qquad 5.2.5\text{-}1$$

unde:

Δl_t - deformarea (lungirea) barei dacă aceasta se încălzeşte cu Δt grade

Δl_N - deformația preluată de perete (de efortul axial N)

$$\Delta l_t = \alpha \cdot a \cdot \Delta t \qquad 5.2.5\text{-}2a$$

$$\Delta l_N = \frac{N \cdot a}{E \cdot A} \qquad 5.2.5\text{-}2b$$

- Cu relațiile 5.2.5-2a,b, relația 5.2.5-1 devine:

$$\alpha \cdot a \cdot \Delta t = \delta + \frac{N \cdot a}{E \cdot A} \qquad 5.2.5\text{-}3a$$

de unde se obține efortul axial N:

$$N = \left(\alpha \cdot a \cdot \Delta_t - \delta\right) \cdot \frac{E \cdot A}{a} \qquad 5.2.5\text{-}3b$$

- Problema este de calcul a unei mărimi capabile (Δt), condiția de stabilitate.
- Lungimea de flambaj a barei (vezi Fig.5.1-1b) este:

$$l_f = 2\ a = 8\ m = 8 \cdot 10^3\ mm \qquad 5.2.5\text{-}4$$

- Relația fundamentală de calcul este:

$$\frac{F_{cr}}{N} = c_{af} \qquad 5.2.5\text{-}5a$$

sau particularizată pentru problema noastră:

$$\frac{F_{cr}}{N} = 1 \qquad 5.2.5\text{-}5b$$

de unde:

$$F_{cr} = N \qquad 5.2.5\text{-}5c$$

- Se calculează coeficientul de zveltețe pentru stabilirea domeniului de flambaj:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} = \frac{4 \cdot l_f}{d} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 10^3}{120} = 266{,}66 > \lambda_0 = 105 \qquad 5.2.5\text{-}6$$

Rezultă domeniul elastic de flambaj.

- Pentru domeniul elastic de flambaj, forța critică F_{cr}, are expresia:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_f^2} = \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d^4}{64 \cdot l_f^2} = \frac{\pi^3 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 120^4}{64 \cdot \left(8 \cdot 10^3\right)^2} \approx 329{,}635 \text{ kN} \qquad 5.2.5\text{-}7$$

- Ținând seama de relația 5.2.5-3b, relația 5.2.5-5c, devine:

$$F_{cr} = \left(\alpha \cdot a \cdot \Delta t - \delta\right) \cdot \frac{E \cdot A}{a} \qquad 5.2.5\text{-}8$$

de unde rezultă variația de temperatură Δt:

$$\Delta t = \frac{F_{cr}}{E \cdot A \cdot \alpha} + \frac{\delta}{\alpha \cdot a} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[\frac{F_{cr}}{E \cdot A} + \frac{\delta}{a}\right] \qquad 5.2.5\text{-}9$$

Cu valorile numerice, relația 5.2.5-9 conduce la:

$$\Delta t = \frac{1}{12 \cdot 10^{-6}} \cdot \left[\frac{329{,}635 \cdot 10^3}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 11{,}3 \cdot 10^3} + \frac{2}{4 \cdot 10^3}\right] = 53{,}2 \ {}^0C \qquad 5.2.5\text{-}10$$

6. CALCULUL ELEMENTELOR DE REZISTENŢĂ SOLICITATE PRIN ŞOCURI

6.1 Consideraţii generale. Etape de calcul

Solicitarea prin şoc are loc atunci când asupra unui corp (element de rezistenţă) intervine o variaţie bruscă de viteză. Şocul este urmarea contactului dintre corpuri, produs într-un timp foarte scurt. În urma şocului, la suprafaţa de contact dintre corpuri, apar forţe foarte mari.

Solicitările prin şoc sunt frecvente în practică la baterea piloţilor, forjarea pieselor, căderea obiectelor grele pe elementele de rezistenţă etc.

În cazul solicitărilor prin şocuri, în elementele de rezistenţă apar eforturi şi de aici tensiuni şi deformaţii, mult mai mari decât în cazul solicitării acestora prin sarcini statice de aceeaşi mărime. Trebuie reţinut faptul că aceste eforturi amplificate ţin un timp foarte scurt, atât cât are loc şocul. Odată cu pierderea efectului de şoc, elementele de rezistenţă rămân solicitate static de către aceleaşi sarcini. Astfel mărimile (eforturi, tensiuni, deformaţii) produse în timpul şocului şi care poartă numele de *mărimi dinamice*, pot fi calculate cu relaţiile:

$$N_d = \psi \cdot N_{st} \qquad 6.1\text{-}1a$$

$$M_{id} = \psi \cdot M_{i,st} \qquad 6.1\text{-}1b$$

$$M_{td} = \psi \cdot M_{t,st} \qquad 6.1\text{-}1c$$

$$\sigma_d = \psi \cdot \sigma_{st} \qquad 6.1\text{-}1d$$

$$\delta_d = \psi \cdot \delta_{st} \qquad 6.1\text{-}1e$$

$$\varphi_d = \psi \cdot \varphi_{st} \qquad 6.1\text{-}1f$$

unde:

N_d, M_{id}, M_{td} - sunt eforturile (axial, încovoietor, torsiune) dinamice adică cele din timpul şocului

N_{st}, $M_{i,st}$, $M_{t,st}$ - eforturile statice, adică cele produse de sarcinile aplicate static

σ_d, δ_d, φ_d - tensiunea normală şi deformațiile (deplasarea, respectiv rotirea) dinamice, cele produse în timpul şocului

σ_{st}, δ_{st}, φ_{st} - tensiunea normală şi deformațiile statice, produse de sarcinile aplicate static

ψ - un multiplicator de şoc (sau de impact) a cărui expresie este:

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} \qquad 6.1\text{-}2$$

unde:

h - înălțimea de la care cade (loveşte) sarcina (greutatea) mobilă

δ_{st} - deplasarea secțiunii de impact produsă de greutatea care loveşte, considerată ca o forță statică aplicată în secțiunea de impact. Această deplasare se calculează pe direcția deplasării sarcinii care produce şocul (impactul).

Din relația 6.1-2 se constată că pentru h = 0 (sarcina nu are înălțime de cădere, dar se aplică brusc), se obține $\Psi = 2$.

Atenție: Pentru o problemă dată, multiplicatorul de impact Ψ are o singuă valoare, indiferent ce mărime se calculează şi indiferent pentru ce element de rezistență al problemei. Unicitatea lui provine din faptul că mărimile care intră în expresia sa (vezi relația 6.1-2) sunt unice în cazul unei probleme. Astfel, greutatea care cade este unică (una singură), secțiunea de impact unică (impactul are loc într-o singură secțiune) şi înălțimea h de la care cade sarcina este tot unică (o sarcină are o singură deplasare h). Deci, pentru o problemă, există un singur multiplicator de impact.

Multiplicatorul de impact Ψ are de obicei valori mari, deoarece deplasarea statică δ_{st} este foarte mică. În aceste cazuri, se poate neglija termenul 1 (unu) din fața radicalului (vezi rel. 6.1-2) şi chiar de sub radical, rezultând o relație simplificată pentru Ψ, de forma:

$$\Psi = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} \qquad 6.1\text{-}3$$

În alte situaţii, în loc de înălţimea de cădere h, se indică viteza de deplasare a sarcinii. În aceste cazuri, se utilizează relaţia căderii libere:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h \qquad 6.1\text{-}4$$

de unde rezultă:

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g} \qquad 6.1\text{-}5$$

care introdusă în relaţia 6.1-2, se obţine:

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \delta_{st}}} \qquad 6.1\text{-}6$$

Relaţiile 6.1-1, 6.1-3, 6.1-6 se utilizează atât pentru solicitarea axială prin şoc cât şi pentru solicitarea de încovoiere prin şoc.

În cazul opririi sau pornirii prin şoc a unui arbore cu ajutorul unui volant, tensiunea tangenţială dinamică maximă are expresia:

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot J}{V}} \qquad 6.1\text{-}7$$

unde:

G - modulul de elasticitate transversal al materialului arborelui

J - momentul de inerţie masic al volantului

V - volumul arborelui care preia şocul.

Pentru un volant de greutate P, având forma unui disc plin de diametru D, momentul de inerție masic J, are expresia:

$$J = \frac{P \cdot D^2}{8 \cdot g} \qquad 6.1\text{-}8$$

iar pentru un volant având forma unei coroane circulare subțiri, de diametru mediu D_m, expresia momentului de inerție masic J, este:

$$J = \frac{P \cdot D_m^2}{4 \cdot g} \qquad 6.1\text{-}9$$

Dacă se doreşte un calcul şi mai exact, atunci momentul de inerție masic J care intră în relația 6.1-7 trebuie să includă şi momentul de inerție masic al arborelui.

În cele prezentate până acum, nu s-a ținut seama de masa corpului lovit.

Dacă se ține seama şi de masa corpului lovit, expresia multiplicatorului de şoc Ψ are expresia:

$$\Psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{st}} \cdot \frac{1}{1 + k \cdot \frac{P_1}{Q}}} \qquad 6.1\text{-}10$$

unde:

P_1 - greutatea corpului lovit

Q - greutatea corpului care loveşte (produce şocul)

k - coeficient de reducere a greutății sau masei corpului lovit.

Astfel pentru:

- şocul axial, k = 1/3 = 0,33
- bara simplu rezemată supusă unui şoc transversal la mijloc, k = 17/35 = 0,485
- bara încastrată lovită în capătul liber, k = 33/140 = 0,235.

În general, calculul la solicitări prin şoc se face din condiția de rezistență, a cărei expresie are forma:

$$\sigma_{d,max} = \Psi \cdot \sigma_{st,max} \qquad 6.1\text{-}11$$

După efectuarea calculului de rezistenţă, în unele situaţii se mai calculează şi deformaţiile produse în timpul şocului (vezi rel. 6.1-1e, respectiv 6.1-1f).

Pentru solicitarea axială şi de încovoiere prin şoc, se parcurg următoarele **etape**:

- Se reprezintă sistemul numai prin axele geometrice ale elementelor componente
  - Pe această reprezentare, se pune în secţiunea de impact greutatea care cade, ca o forţă aplicată static
  - Se stabileşte tipul de problemă şi condiţia impusă.
  - Se scrie relaţia generală de calcul (rel. 6.1-11) care în funcţie de tipul de problemă (verificare, dimensionare, efort capabil) se compară sau se egalează cu σ_a.
  - Se calculează deplasarea statică δ_{st} produsă de greutatea statică aplicată în secţiunea de impact.
  - Se particularizează relaţia scrisă alegând pentru Ψ expresia convenabilă (rel. 6.1-2, 6.1-3, 6.1-6 sau 6.1-10).
  - Se stabileşte secţiunea periculoasă şi se calculează tensiunea statică maximă $\sigma_{st,max}$.
  - Din relaţia rezultată se determină mărimea necunoscută (tensiune maximă, înălţime maximă de cădere, mărimea maximă a greutăţii care produce şocul).

Pentru calculul deformaţiilor din momentul şocului (deformaţiile dinamice), se utilizează relaţiile 6.1-1e, respectiv 6.1-1f.

6.2 Modele de probleme rezolvate

6.2.1 *O greutate Q cade de la înălțimea h = 0,5 m pe suportul B susținut de barele 1,2 şi 3, ca în Fig.6.2.1-1. Se cere:*

a) *să se calculeze valoarea greutății Q, astfel ca în momentul şocului în nici o bară să nu se depăşească* σ_a *= 160 MPa*

b) *deplasarea maximă a secțiunii de impact.*

Barele au aceeaşi lungime a =1 m, aceeaşi arie A = 1 cm^2, $\alpha = 30^0$ *şi sunt din oțel pentru care E = 2.1 · 10*^{5} *MPa.*

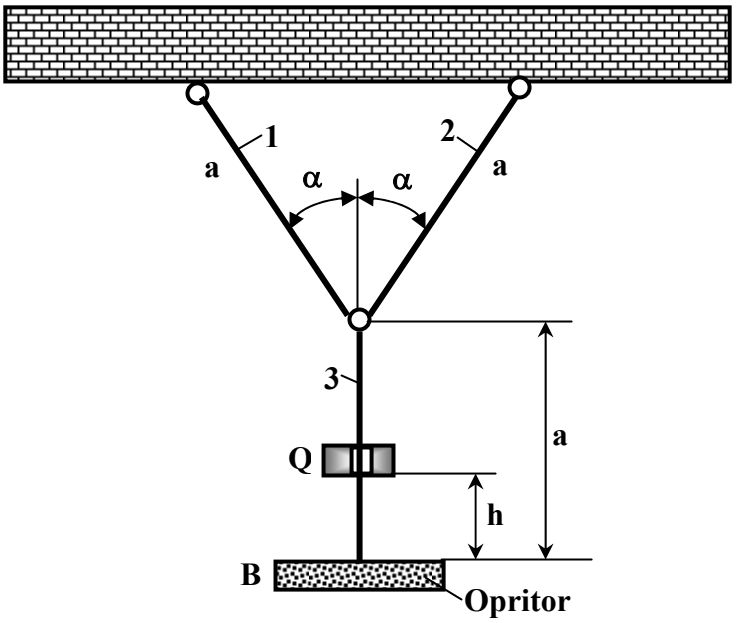


Fig.6.2.1-1

Rezolvare:

Se parcurg etapele indicate.

a) Sistemul reprezentat numai prin axele geometrice ale elementelor de rezistență este prezentat în Fig.6.2.1-2a.

- Greutatea care cade pusă în secțiunea de impact ca o sarcină statică este prezentată în Fig.6.2.1-2b.
- Problema este de efort capabil, condiția de rezistență.
- Relația generală de calcul este:

$$\sigma_{max} = \Psi \cdot \sigma_{st,max} = \sigma_a \qquad 6.2.1\text{-}1$$

care particularizată, capătă forma:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} \cdot \sigma_{st,max} = \sigma_a \qquad 6.2.1\text{-}2$$

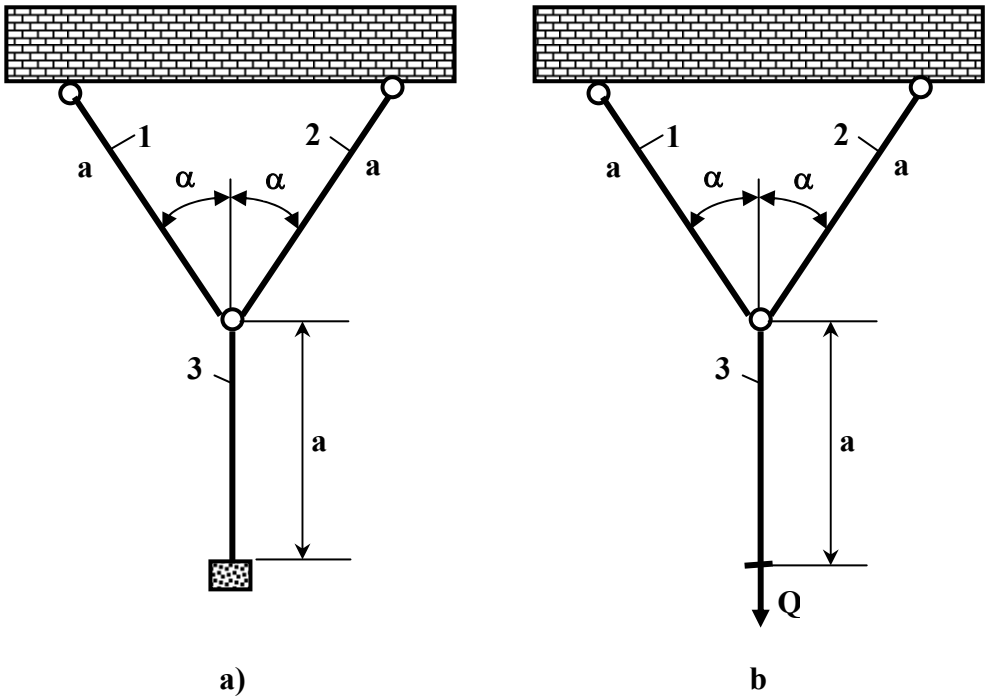


Fig.6.2.1-2

- Pentru sistemul din Fig.6.2.1-2b, se calculează deplasarea secțiunii 1, care reprezintă secțiunea de impact. Pentru aceasta se determină mai întâi eforturile axiale din cele trei bare. Din schema eforturilor (Fig.6.2.1-3) rezultă:

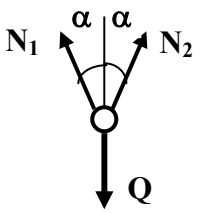


Fig.6.2.1-3

$(\Sigma F)_x = 0 \;\Rightarrow\; N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\alpha = 0$

$$\Rightarrow N_1 = N_2 \qquad 6.2.1\text{-}3a$$

$$(\Sigma F)_y = 0 \;\Rightarrow\; N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha = Q$$

$$\Rightarrow 2N_1 \text{coa}\alpha = Q \;\Rightarrow\; N_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Q = 0{,}577Q < Q \qquad 6.2.1\text{-}3b$$

♦ Schema pentru calculul deplasării statice a secțiunii de impact este prezentată în Fig.6.2.1-4 (vezi calculul sistemelor de bare articulate).

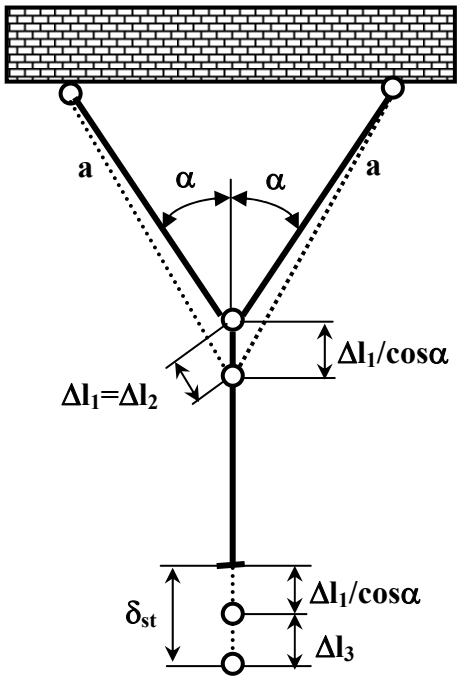


Fig.6.2.1-4

Se obține:

$$\delta_{st} = \frac{\Delta l_1}{\cos\alpha} + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A \cdot \cos\alpha} + \frac{N_3 \cdot a}{E \cdot A} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Q \cdot a}{E \cdot A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{Q \cdot a}{E \cdot A} = \frac{5}{2} \cdot \frac{Q \cdot a}{E \cdot A} = 1{,}66 \cdot \frac{Q \cdot a}{E \cdot A} \qquad \mathbf{6.}2.1\text{-}4$$

- Secțiunea periculoasă este oricare a barei 3 (pentru bara verticală $N_3 = N_{max} = Q$) iar tensiunea normală maximă este atunci:

$$\sigma_{st,\,max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{N_3}{A} = \frac{Q}{A} \qquad 6.2.1\text{-}5$$

- Înlocuind relația 6.2.1-4 şi 6.2.1-5 în relația 6.2.1-2 se obține:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{\frac{5 \cdot Q \cdot a}{3 \cdot E \cdot A}}} \cdot \frac{Q}{A} = \sigma_a \qquad 6.2.1\text{-}6$$

- Din relația 6.2.1-6 se determină mărimea greutății care produce şocul:

$$Q = \frac{5 \cdot a \cdot A \cdot \sigma_a^2}{6 \cdot h \cdot E} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 10^2 \cdot 160^2}{6 \cdot 500 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5} \approx 101{,}587 \ \text{N} \qquad 6.2.1\text{-}7$$

b) Deplasarea maximă a secțiunii de impact are loc în momentul şocului:

$$\delta_{1,max} = \Psi \cdot \delta_{st,1} = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} \cdot \delta_{st,1} \qquad 6.2.1\text{-}8$$

Deplasarea statică este:

$$\delta_{st,1} = \frac{5}{3} \cdot \frac{Q \cdot a}{E \cdot A} = 8{,}062 \cdot 10^{-3} \ \text{mm} \qquad 6.2.1\text{-}9$$

iar multiplicatorul de şoc are valoarea:

$$\Psi = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500}{8{,}062 \cdot 10^{-3}}} = 352{,}19 \qquad 6.2.1\text{-}10$$

o valoare foarte mare.

Din relaţia 6.2.1-8 rezultă deplasarea secţiunii de impact în momentul şocului:

$$\delta_{1,max} = \Psi \cdot \delta_{st,1} = 352{,}19 \cdot 8{,}062 \cdot 10^{-3} = 2{,}839 \quad \text{mm} \qquad 6.2.1\text{-}11$$

6.2.2 *De la ce înălţime poate să cadă greutatea Q = 100 daN pe sistemul din Fig.6.2.2-1 astfel încât tensiunea normală maximă să nu depăşască* σ_a *= 150 MPa. Bara oriontală este rigidă, iar cea verticală are secţiunea circulară cu diametrul d = 40 mm şi este realizată din oţel pentru care E = 2,1 · 10*^{5} *MPa.*

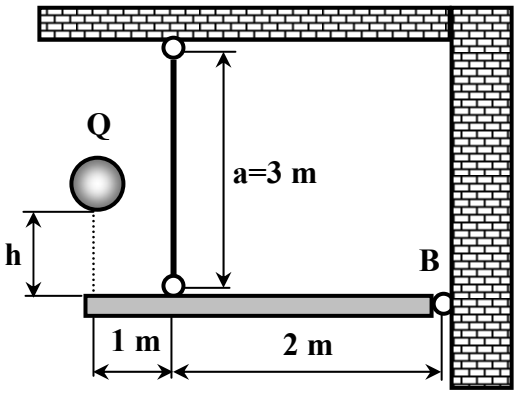


Fig.6.2.2-1

Rezolvare:

- Sistemul dat, reprezentat numai prin axele geometrice ale elementelor componente, este prezentat în Fig.6.2.2-2a, iar cel cu greutatea Q aplicată static în Fig.6.2.2-2b.

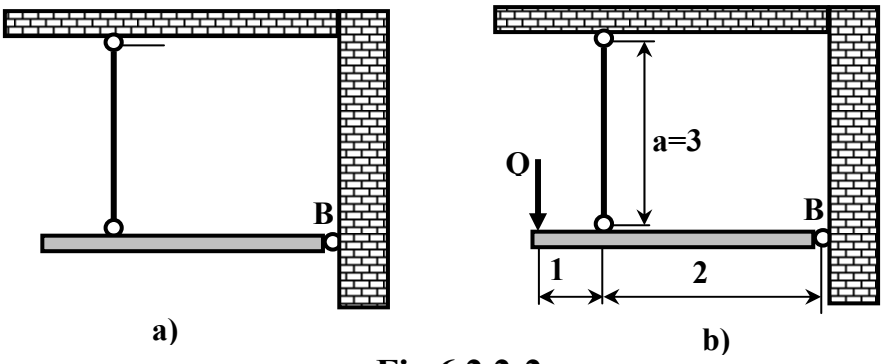


Fig.6.2.2-2

- Pentru sistemul din Fig.6.2.2-2b se calculează deplasarea statică δ_{st} a secțiunii de impact. Mai întâi se determină efortul axial din bara verticală articulată. Schema pentru calculul efortului axial este prezentată în Fig.6.2.2-3a.

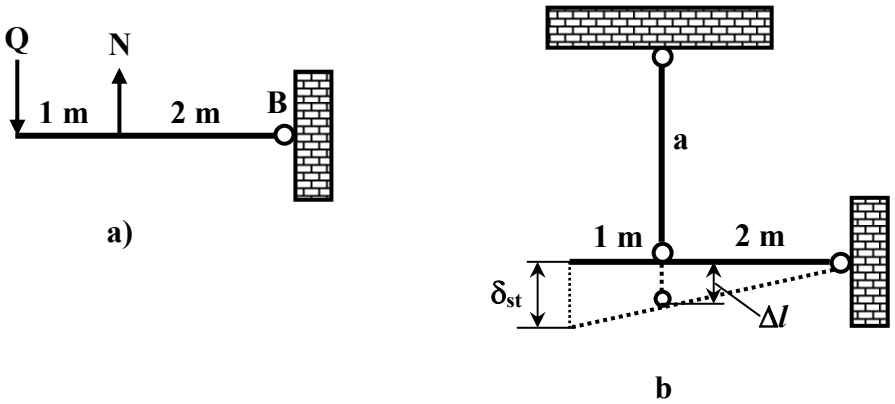


Fig.6.2.2-3

Pentru sistemul din Fig.6.2.2-3a se poate scrie:

$$(\Sigma M)_B = 0 \;\Rightarrow\; Q\cdot 3 - N\cdot 2 = 0$$

$$\Rightarrow\; N = \frac{3}{2}\cdot Q = 1{,}5\cdot Q = 150 \text{ daN} \qquad 6.2.2\text{-}1$$

- Problema este de calcul a înălțimii de cădere (de "efort" capabil).
- Relația generală de calcul este:

$$\Psi \cdot \sigma_{st,\,max} = \sigma_a \qquad 6.2.2\text{-}2a$$

sau

$$\Psi \cdot \sigma_{st,\,max} = \sigma_a \qquad 6.2.2\text{-}2b$$

- Secțiunea periculoasă pentru bara articulată este oricare.
- Tensiunea statică maximă este:

$$\sigma_{st,max} = \frac{N}{A} = \frac{N}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 1.500}{\pi \cdot 40^2} = 1,19 \text{ MPa} \qquad 6.2.2\text{-}3$$

- Deplasarea statică δ_S a secțiunii de impact se calculează din sistemul prezentat în Fig.6.2.2-3b:

$$\frac{\Delta l}{\delta_{st}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \delta_{st} = \frac{3}{2} \cdot \Delta l \qquad 6.2.2\text{-}4a$$

sau

$$\delta_{st} = \frac{3}{2} \cdot \Delta l = \frac{3}{2} \cdot \frac{N \cdot a}{E \cdot A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1.500 \cdot 10^3}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 40^2}{4}} = 0,025 \text{ mm} \qquad 6.2.2\text{-}4b$$

Înlocuind relația 6.2.2-3 şi relația 6.2.2-4b în relația 6.2.2-2b, rezultă:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{0,025}} \cdot 1,19 = 150 \qquad 6.2.2\text{-}5$$

de unde se obține înălțimea maximă de la care poate să cadă greutatea Q:

$$h = \frac{0,025 \cdot 150^2}{2 \cdot 1,19^2} = 198,6 \text{ mm} \qquad 6.2.2\text{-}6$$

Pentru acest sistem, multiplicatorul de impact (după relația simplificată) are valoarea:

$$\Psi = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 198,6}{0,025}} = 126,06 \qquad 6.2.2\text{-}7$$

Toate mărimile (tensiuni şi deformații) în momentul şocului se amplifică de 126,06 ori față de situația în care greutatea Q ar fi aplicată ca o forță statică în secțiunea de impact (Fig.6.2.2-2b).

6.2.3 *Pentru bara de oțel din Fig.6.2.3-1, (E = 2,1·10^5 MPa), să se calculeze valoarea maximă a greutății Q care poate să cadă de la înălțimea h = 250 mm, astfel încât tensiunea normală maximă să nu depășească* σ_a *= 150 MPa.*

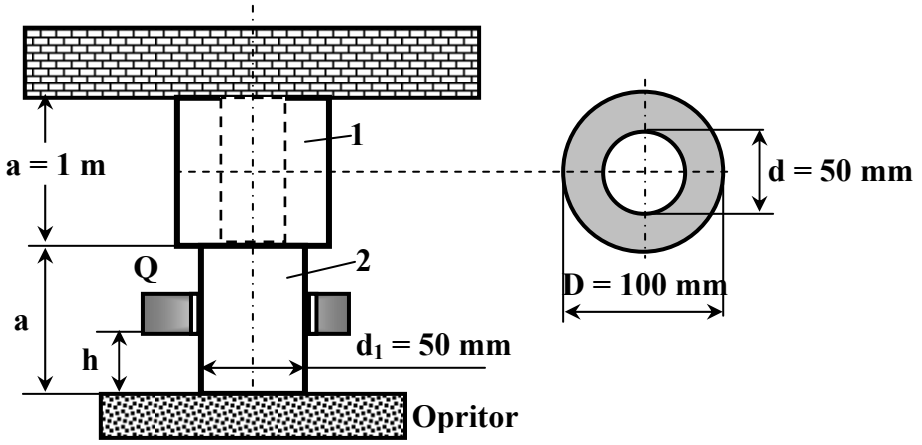


Fig.6.2.3-1

Rezolvare:

- Sistemul reprezentat numai prin axa geometrică a elementelor componente este prezentat în Fig.6.2.3-2a, iar încărcat cu sarcina Q aplicată static în secțiunea de impact, în Fig.6.2.3-2b.

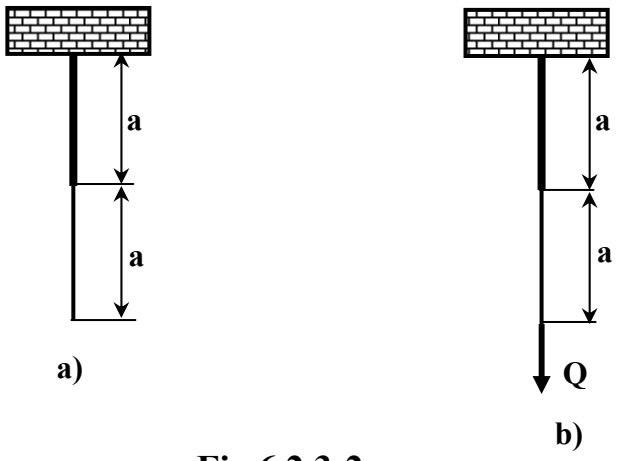


Fig.6.2.3-2

- Problema este de efort capabil.
- Relația generală de calcul este:

$$\Psi \cdot \sigma_{st,max} = \sigma_a \qquad 6.2.3\text{-}1a$$

sau

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} \cdot \sigma_{st,max} = \sigma_a \qquad 6.2.3\text{-}1b$$

- Se calculează deplasarea statică a secțiunii de impact. Se poate uşor constata că pentru toată bara, efortul axial este constant şi are valoarea:

$$N = Q \qquad 6.2.3\text{-}2$$

Deplasarea statică a secțiunii de impact este:

$$\delta_{st} = \Delta l_2 + \Delta l_1 = \frac{N \cdot a}{E \cdot A_2} + \frac{N \cdot a}{E \cdot A_1} =$$

$$= \frac{Q \cdot a}{E} \cdot \frac{A_1 + A_2}{A_1 \cdot A_2} = 0{,}551 \cdot 10^{-5} \cdot Q \qquad 6.2.3\text{-}3$$

unde:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 1.875 \cdot \pi \ \text{mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = 1.600 \cdot \pi \ \text{mm}^2$$

- Secțiunea periculoasă este oricare pe porțiunea cu diametrul d_1, ($A_2 < A_1$). Tensiunea normală statică maximă este:

$$\sigma_{st,max} = \frac{Q}{A_2} \qquad 6.2.3\text{-}4$$

Înlocuid relația 6.2.3-4 în relația 6.2.3-3b, rezultă:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} \cdot \frac{Q}{A_2} = \sigma_a \qquad 6.2.3\text{-}5a$$

sau

$$\sqrt{\frac{2 \cdot h}{0{,}551 \cdot 10^{-5} \cdot Q}} \cdot \frac{Q}{A_2} = \sigma_a \qquad 6.2.3\text{-}5b$$

de unde rezultă valoarea maximă admisă pentru sarcina care cade Q:

$$Q = \frac{0{,}551 \cdot 10^{-5} \cdot (1.600 \cdot \pi)^2 \cdot 150^2}{2 \cdot 250} = 6.258{,}4 \ \text{N} \approx 6{,}258 \ \text{kN} \qquad 6.2.3\text{-}6$$

♦ Multiplicatorul de impact are valoarea:

$$\Psi = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 250}{0{,}551 \cdot 10^{-5} \cdot 6.258{,}4}} = 120{,}41 \qquad 6.2.3\text{-}7$$

6.2.4 a) *Să se determine înălţimea de la care poate să cadă o greutate Q = 200 N pe o grindă suspendată cu două cabluri, ca în Fig.6.2.4-1, astfel încât tensiunea normală maximă să nu depăşească* σ_a *= 150 MPa.*

b) *Să se calculeze deplasările maxime ale elementelor sistemului în momentul producerii şocului. Pentru materialul elementelor componente se va lua E = 2,1· 10*^{5} *MPa.*

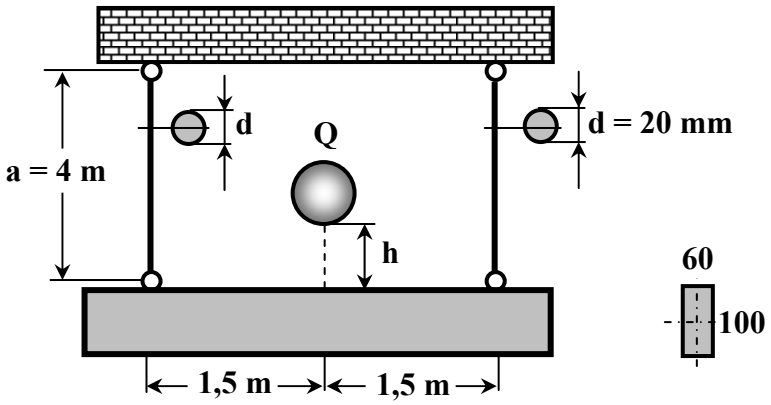


Fig.6.2.4-1

Rezolvare:

- Sistemul reprezentat numai prin axele geometrice ale elementelor componente este prezentat în Fig.6.2.4-2a.
- Sistemul încărcat cu sarcina Q aplicată ca o forță statică în secțiunea de impact, este prezentat în Fig.6.2.4-2b.
- Problema este de calcul a înălțimii de cădere (mărime capabilă).

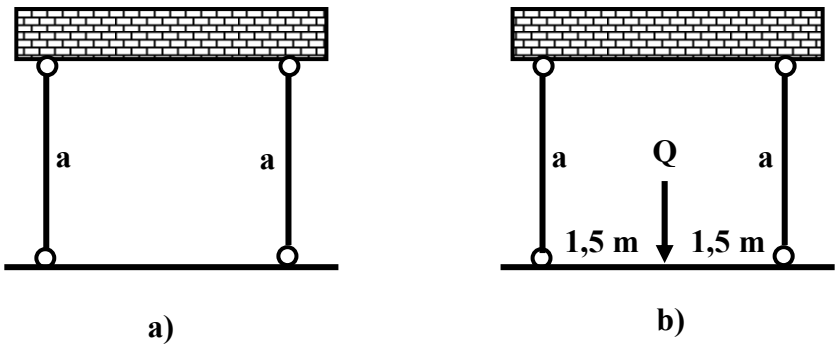


Fig.6.2.4-2

- Relația generală de calcul are expresia:

$$\sigma_{max} = \Psi \cdot \sigma_{st,max} = \sigma_a \qquad 6.2.4\text{-}1a$$

sau

$$\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}}\right) \cdot \sigma_{st,max} = \sigma_a \qquad 6.2.4\text{-}1b$$

- Se stabileşte secțiunea periculoasă. La această problemă există două elemente care pot conține secțiunea periculoasă: barele articulate şi grinda.

Mai întâi se determină tensiunea statică maximă din barele articulate. Pentru aceasta, pe schema din Fig.6.2.4-3a se determină eforturile axiale din cele două bare.

$$\left(\sum F\right)_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = 0 \qquad 6.2.4\text{-}2a$$

$$\left(\sum M\right)_B = 0 \Rightarrow Q \cdot 1{,}5 - N_2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{Q}{2} \qquad 6.2.4\text{-}2b$$

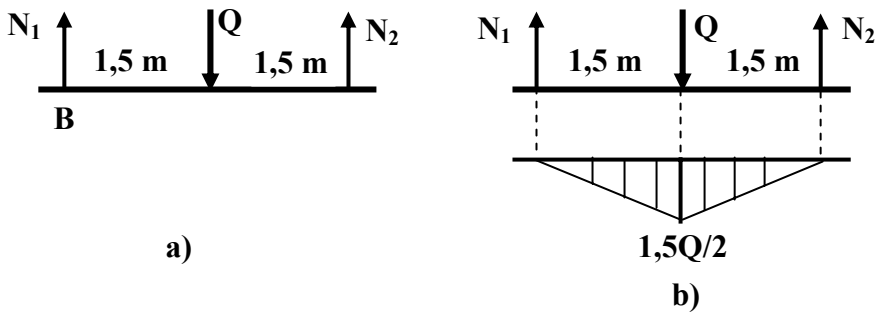


Fig.6.2.4-3

Ținând seama de relația 6.2.4-2b, din relația 6.2.4-2a rezultă:

$$N_1 = N_2 = \frac{Q}{2} = 100 \text{ N} \qquad 6.2.4\text{-}2c$$

Pentru cele două bare, oricare secțiune este la fel de periculoasă. Tensiunea normală statică maximă din barele articulate este:

$$\sigma_{st,max} = \frac{N_1}{A} = \frac{N_1}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{4 \cdot N_1}{\pi \cdot d^2} = 0{,}318 \text{ MPa} \qquad 6.2.4\text{-}3$$

- Pentru stabilirea secțiunii periculoase la grindă, se trasează diagrama M_i (vezi Fig.6.2.4-3b), deoarece grinda orizontală este solicitată la încovoiere. Secțiunea periculoasă a grinzii este secțiunea în care acționează sarcina statică Q.
  Tensiunea normală statică maximă din grindă este:

$$\sigma_{st,max.gr} = \frac{M_{iz}}{W_z} = \frac{\frac{1.500 \cdot Q}{2}}{\frac{60 \cdot 100^2}{6}} = 1{,}5 \text{ MPa} \qquad 6.2.4\text{-}4$$

Tensiunea normală statică maximă din grindă este mai mare decât tensiunea normală statică maximă din barele articulate. Rezultă că elementul cel mai periculos din sistem, este grinda şi anume secțiunea în care este aplicată sarcina statică Q (secțiunea în care se produce şocul).

- Se calculează acum deplasarea statică δ_{st} a secțiunii de impact. Trebuie avut în vedere că la acest sistem se deformează atât barele articulate cât şi grinda orizontală.

Schema pentru calculul deplasării statice a secțiunii de impact este prezentată în Fig.6.2.4-4.

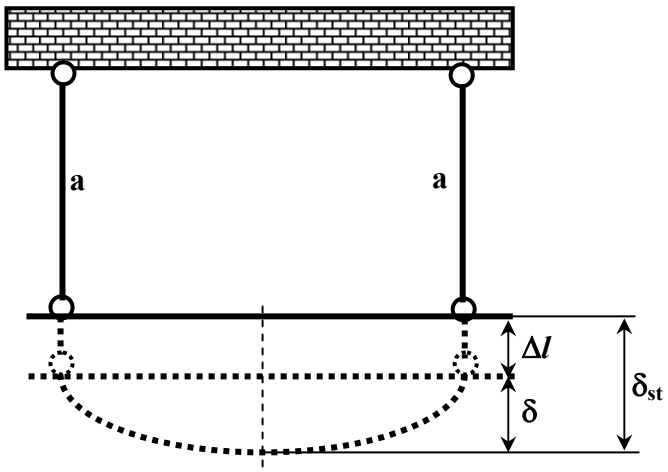


Fig.6.2.4-4

Din Fig.6.2.4-4 rezultă că deplasarea statică δ_S este:

$$\delta_{st} = \Delta l + \delta \qquad 6.2.4\text{-}2$$

unde:

Δl - lungirea barelor articulate

δ - deplasarea (săgeata) statică a secțiunii de impact, datorită deformării grinzii.

Pentru calculul deplasării δ se poate utiliza metoda sarcinii unitare, procedeul Veresceaghin, metodă prezentată într-un capitol anterior (Cap. 3). Calculele efectuate au condus la următorul rezultat:

$$\delta = \frac{Q \cdot 1.500^3}{6 \cdot E \cdot I_z} = 0{,}107 \ \text{mm} \qquad 6.2.4\text{-}3$$

Lungirea barelor verticale este:

$$\Delta l = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A} = \frac{100 \cdot 4.000}{2{,}1 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 100} = 0{,}006 \ \text{mm} \qquad 6.2.4\text{-}4$$

Ţinând seama de relaţia 6.2.4-3 şi relaţia 6.2.4-4, din relaţia 6.2.4-2 se obţine:

$$\delta_{st} = \Delta l + \delta = 0{,}006 + 0{,}107 = 0{,}113 \ \text{mm}$$

- Având calculate δ_{st} şi $\sigma_{st,max}$, acestea se introduc în relaţia 6.2.4-1b, rezultând:

$$\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{0{,}113}}\right) \cdot 1{,}5 = 150 \qquad 6.2.4\text{-}5$$

Rezolvând ecuaţia 6.2.4-5, se obţine înălţimea de cădere h a greutăţii Q:

$$h = 553{,}7 \ \text{mm}$$

b) Din relaţia 6.2.4-1a rezultă valoarea multiplicatorului de impact:

$$\Psi = \frac{\sigma_a}{\sigma_{st,max}} = \frac{150}{1{,}5} = 100 \qquad 6.2.4\text{-}6$$

Pentru acest sistem, în momentul şocului, tensiunile şi deformaţiile se amplifică de 100 de ori. Atunci, în momentul şocului şi lungirea barelor articulate se măreşte tot de 100 de ori, la fel şi săgeata grinzii.

În momentul şocului, pentru cele două elemente de rezistenţă (barele şi grinda), deformaţiile maxime (dinamice), sunt:

- pentru barele articulate:

$$\Delta l_{max} = \Delta l_{d,max} = \Psi \cdot \Delta l = 100 \cdot 0{,}006 = 0{,}6 \quad \text{mm}$$

- pentru grindă:

$$\delta_{max,gr} = \Delta l_{d,gr} = \Psi \cdot \delta = 100 \cdot 0{,}107 = 10{,}7 \quad \text{mm}$$

iar deplasarea maximă a secțiunii de impact, este:

$$\delta_{max} = \delta_d = \Psi \cdot \delta_{st} = 100 \cdot 0{,}113 = 11{,}3 \quad \text{mm}$$

6.2.5 *Greutatea Q = 20 daN cade de la înălțimea h pe bara de oțel cu secțiunea circulară de diametru d = 50 mm, ca în Fig.6.2.5-1.*

Se cere să se calculeze înălțimea h de la care poate să cadă greutatea Q, astfel încât în momentul şocului tensiunea normală din sistem să nu depăşească σ_a *= 150 MPa. În calcule se va neglija greutatea barei. Se consideră E = 2,1 · 10*^{5} *MPa.*

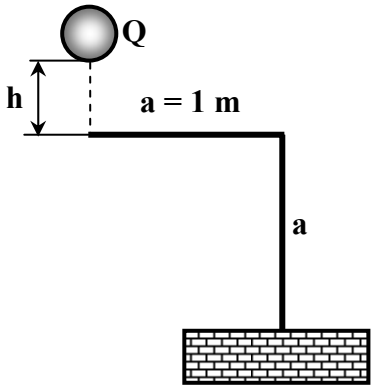


Fig.6.2.5-1

Rezolvare:

- Sistemul reprezentat numai prin axa geometrică este prezentat în Fig.6.2.5-2a, iar cel încărcat cu sarcina statică Q, în Fig.6.2.5-2b.
- Problema este de calcul a înălțimii maxime de cădere (mărime capabilă), condiția de rezistență.

♦ Relaţia generală de calcul, este:

$$\sigma_{max} = \Psi \cdot \sigma_{st,max} = \sigma_a \qquad 6.2.5\text{-}1a$$

sau

$$\sqrt{1+\frac{2\cdot h}{\delta_{st}}}\cdot\sigma_{st,max} = \sigma_a \qquad 6.2.5\text{-}1b$$

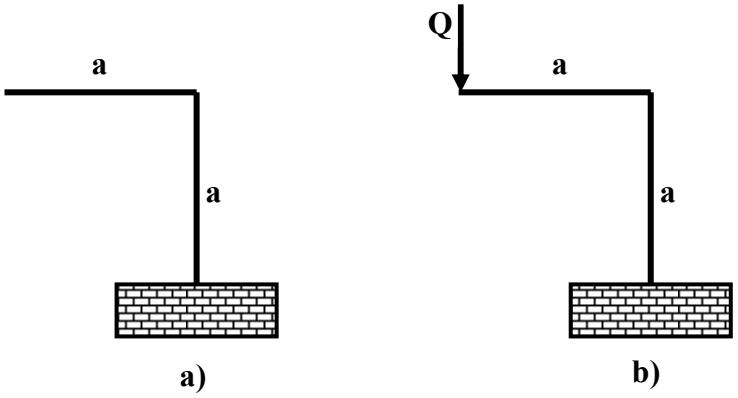


Fig.6.2.5-2

♦ Pentru determinarea solicitărilor şi a secţiunii periculoase, pentru sistemul din Fig.6.2.5-2b, se trasează diagramele de eforturi (Fig.6.2.5-3).

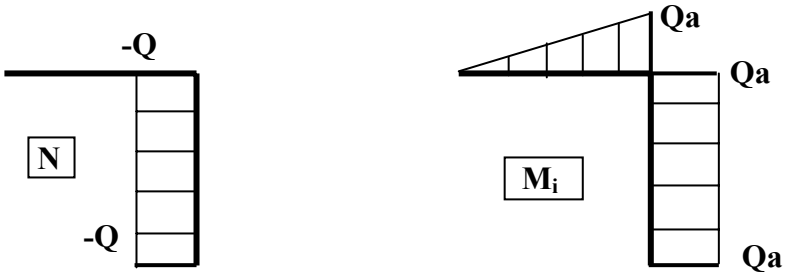


Fig.6.2.5-3

♦ Din Fig.6.2.5-3 rezultă că secţiunea periculoasă este oricare de pe bara verticală a sistemului, unde acţionaează eforturile:

$$N = -Q \qquad 6.2.5\text{-}2a$$

$$M_i = Q \cdot a \qquad 6.2.5\text{-}2b$$

În secțiunea periculoasă (secțiune circulară) rezultă o solicitare compusă de categoria I, iar tensiunea normală statică maximă, este:

$$\sigma_{st,max} = -\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{W_z} = -\frac{Q}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} + \frac{Q \cdot a}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = 16{,}195 \text{ MPa} \qquad 6.2.5\text{-}3$$

- Se calculează acum deplasarea statică δ_S a secțiunii de impact. Pentru aceasta se adoptă metoda sarcinii unitare (Mohr-Maxwell), procedeul Veresceaghin. Pentru calculul lui δ_{st} se ține seama numai de momentul încovoietor, cu diagramele corespunzătoare prezentate În Fig.6.2.5-4.

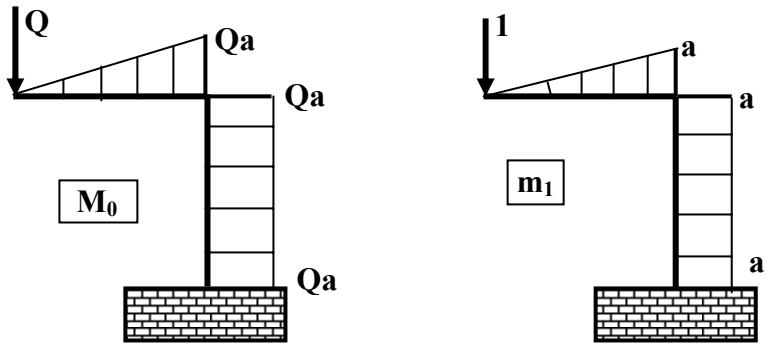


Fig.6.2.5-4

- Rezultă δ_{st}:

$$EI \cdot \delta_{st} = \frac{1}{2} \cdot Qa \cdot a \cdot \frac{2}{3} a + Qa \cdot a \cdot a = \frac{4}{3} \cdot Qa^3 \qquad 6.2.5\text{-}4a$$

de unde se obține

$$\delta_{st} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Qa^3}{EI} = 4{,}139 \quad \text{mm} \qquad 6.2.5\text{-}4b$$

Cu valorile $\sigma_{st,max}$ şi δ_{st}, relația 6.2.5-1b, capătă forma:

$$\sqrt{1+\frac{2\cdot h}{4{,}139}}\cdot 16{,}195 = 150 \qquad 6.2.5\text{-}5$$

de unde, rezultă înălţimea maximă de la care poate să cadă greutatea Q:

$$h = 175{,}46 \text{ mm} \qquad 6.2.5\text{-}6$$

6.2.6 *Să se calculeze tensiunea maximă din cablul de ascensor (Fig.6.2.6-1) în cazul în care sarcina Q care coboară este frânată brusc. Pentru amortizarea şocului între cablu şi sarcină s-a introdus un arc de amortizare. Se consideră* a *- lungimea cablului,* E *- modulul de elasticitate longitudinal al materialului cablului,* v *- viteza sarcinii în momentul frânării brusce şi* k *- constanta elastică a arcului.*

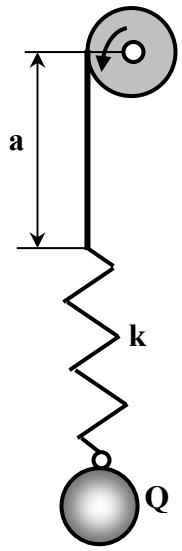


Fig.6.2.6-1

Rezolvare:

- Sistemul reprezentat numai prin axa sa geometrică a elementelor componente este prezentat în Fig.6.2.6-2a, iar cel încărcat cu sarcina statică Q, în Fig.6.2.6-2b.
- Cablul este solicitat la întindere, secţiunea periculoasă fiind oricare.
- Relaţia generală de calcul este:

$$\sigma_{max} = \Psi \cdot \sigma_{st,max} \qquad 6.2.6\text{-}1a$$

sau

$$\sigma_{max} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \delta_{st}}}\right) \cdot \sigma_{st,max} \qquad 6.2.6\text{-}1b$$

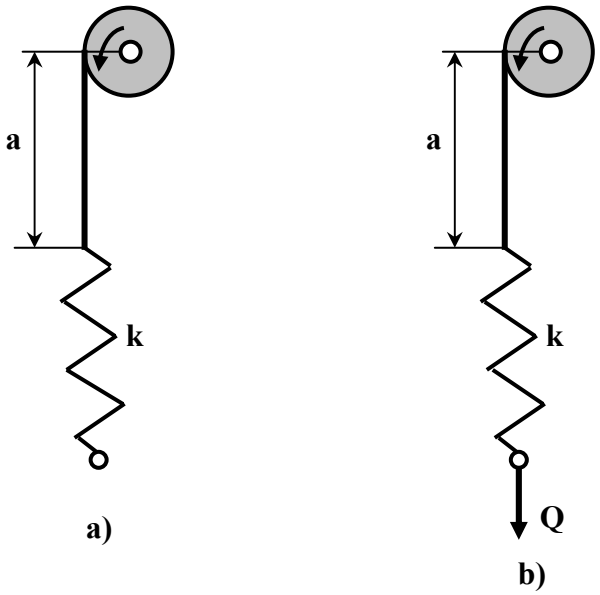


Fig.6.2.6-2

♦ Se calculează tensiunea normală statică maximă:

$$\sigma_{st,max} = \frac{N}{A} = \frac{Q}{A} \qquad 6.2.6\text{-}2$$

♦ Deplasarea statică δ_{st} a secțiunii de impact este compusă din lungirea cablului (Δl_C) plus lungirea resortului (Δl_r):

$$\delta_{st} = \Delta l_c + \Delta l_r = \frac{Q \cdot a}{E \cdot A} + \frac{Q}{k} = \frac{Q \cdot a}{E \cdot A} \cdot \left(1 + \frac{E \cdot A}{k \cdot a}\right) \qquad 6.2.6\text{-}3$$

♦ Cu valorile $\sigma_{st,max}$ şi δ_{st}, relația de calcul 6.2.6-1b, devine:

$$\sigma_{max} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \frac{Q \cdot a}{E \cdot A} \cdot \left(1 + \frac{E \cdot A}{k \cdot a}\right)}}\right) \cdot \frac{Q}{A} \qquad 6.2.6\text{-}4$$

Din relaţia 6.2.6-4 rezultă foarte clar rolul arcului de amortizare. Cu cât arcul este mai moale (k - mai mic), cu atât el se întinde mai mult şi tensiunea dinamică este mai mică.

- Fie acum următorul exemplu numeric:

  $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, v = 1 m/s, Q = 5 kN, A = 600 mm^2,
  a = 20 m, k = 0,4 N/m.

- Cu aceste valori, tensiunea maximă (dinamică) din cablu, este:

$$\sigma_{max} = 193{,}32 \text{ MPa} \qquad 6.2.6\text{-}5$$
$$\Psi = 2{,}32$$

- Dacă nu există resort de amortizare ($k \to \infty$), tensiunea maximă din cablu, este:

$$\sigma'_{max} = 390{,}82 \text{ MPa} \qquad 6.2.6\text{-}6$$
$$\Psi = 4{,}69$$

- Se constată că lipsa resortului de amortizare a şocului, conduce la creşterea tensiunii normale maxime de:

$$\frac{\sigma'_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{390{,}82}{193{,}32} = 2{,}02$$

- Pentru solicitările prin şoc, elementele de amortizare au un rol deosebit de important, ele reduc în mod substanţial tensiunile şi deformaţiile elementelor.

7. CALCULUL LA SOLICITĂRI VARIABILE (OBOSEALĂ)

7.1 Considerații generale. Etape de calcul

Experiența a condus la constatarea că materialele rezistă la solicitări variabile mai puțin decât la solicitări statice.

Fenomenul de micşorare a caracteristicilor de rezistență sub efectul solicitărilor variabile, poartă numele de ***oboseala materialului***. Caracteristica mecanică a materialului la solicitări variabile este **rezistența la oboseală**. Simbolurile pentru rezistențele la oboseală au ca indici valorile coeficientului de asimetrie al ciclului (vezi elementele ciclului de solicitare) şi se notează astfel:

σ_{-1} - rezistența la oboseală pentru ciclul alternant simetric de încovoiere

σ_{-1t} - rezistența la oboseală pentru ciclul alternant simetric de tracțiune-compresiune

τ_{-1t} - rezistența la oboseală pentru ciclul alternant simetric de torsiune

σ_0 - rezistența la oboseală pentru ciclul pulsant de încovoiere

σ_{0t} - rezistența la oboseală pentru ciclul pulsant de tracțiune

σ_{0c} - rezistența la oboseală pentru ciclul pulsant de compresiune

τ_0 - rezistența la oboseală pentru ciclul pulsant de torsiune

σ_P - rezistența la oboseală pentru ciclul oarecare de încovoiere

σ_{Rt} - rezistența la oboseală pentru ciclul oarecare de tracțiune

τ_R - rezistența la oboseală pentru ciclul oarecare de răsucire.

Pentru o solicitare dată, rezistențele la oboseală prin ciclu alternant simetric sunt cele mai mici, cele prin ciclul pulsant sunt mai mari, iar la solicitările statice sunt cele mai mari.

Între rezistențele la oboseală şi caracteristicile mecanice statice ale materialelor, există anumite relații empirice:

- la oțeluri:

$$\sigma_{-1} = (0{,}4 \ldots 0{,}5)\cdot\sigma_r \qquad \sigma_0 = (1{,}5 \ldots 1{,}6)\cdot\sigma_{-1}$$
$$\sigma_{-1t} = (0{,}7 \ldots 0{,}8)\cdot\sigma_{-1} \qquad \sigma_{0t} = 1{,}5\cdot\sigma_{-1t}$$
$$\tau_{-1} = (0{,}55 \ldots 0{,}58)\cdot\sigma_{-1} \qquad \tau_0 = (1{,}8 \ldots 2{,}0)\cdot\tau_{-1} \qquad 7.1\text{-}1$$

➢ la aliaje uşoare:

$\sigma_{-1t} = (0{,}25 \ldots 0{,}5)\cdot\sigma_r$

În Tabelul 7.1-1 sunt prezentate caracteristicile mecanice şi rezistențele la oboseală pentru câteva materiale, utilizate frecvent în construcția de maşini.

Teoretic, un material prezintă o infinitate de rezistențe la oboseală (există o infinitate de cicluri de solicitare). Variația rezistenței la oboseală a unui material în funcție de coeficientul de asimetrie al ciclului de solicitare, reprezintă aşa numita **diagramă a rezistențelor la oboseală** sau **curba ciclurilor limită.** Pentru simplificarea calculelor la oboseală, diagramele rezistențelor la oboseală se schematizează. În literatura de specialitate sunt cunoscute mai multe astfel de schematizări: Goodman, Soderberg, Serensen, etc.

Rezistențele la oboseală sunt influențate de o serie de factori. Cei mai importanți factori de influență a rezistențelor la oboseală sunt:

➢ ***Concentratorii de tensiune.*** De influența lor se ține seama în calcule prin **coeficientul efectiv de concentrare** al tensiunii sau factorul de reducere al rezistenței la oboseală, notat K_σ, K_τ . Aceştia se determină pe cale experimentală pentru fiecare tip şi mărime de concentrator şi se prezintă de obicei sub formă de diagrame. În lipsa unor astfel de diagrame, pentru elementele de secțiune circulară se pot utiliza şi valorile prezentate în Tabelul 7.1-2, sau calcula pentru oțelurile cu σ_r = 400 ... 1300 MPa, cu relațiile:

➢ pentru piese care nu au treceri bruşte de la o formă la alta, caneluri, caneluri pentru pene şi au o suprafață bine strunjită:

$$K_\sigma = 1{,}2 + 0{,}2\cdot\frac{\sigma_r - 400}{1.100} \qquad 7.1\text{-}2$$

➢ pentru piese cu variații bruşte ale secțiunii, crestături, caneluri:

$$K_\sigma = 1{,}5 + 1{,}5\cdot\frac{\sigma_r - 400}{1.100} \qquad 7.1\text{-}3$$

Tabelul 7.1-1

Denumirea materialului	Caracteristici mecanice statice la 20 ^{0}C			Rezistențe la oboseală						Observații
	σ_r [MPa]	σ_c [MPa]	A_5 [%]	Încovoiere		Tracțiune compresiune		Răsucire		
				σ_{-1} [MPa]	σ_0 [MPa]	σ_{-1t} [MPa]	σ_{0t} [MPa]	τ_{-1} [MPa]	τ_0 [MPa]	
Oțel de uz general OL 37	360-440	210-240	25	185	250	135	220	105	140	În stare normalizată
OL 50	490-610	270-290	21	240	320	175.00	270	140	170	Idem
OL 70	min.690	340-360	11	330	420	230.00	350	190	220	Idem
OLC 25	min.450	270	24	190-240	300	140-160	250	100-120	160	Idem
OLC 45	min.610	360	18	280-320	430	200-220	360	160-170	220	Idem
OLC 60	min.700	400	14	320-360	500	230-260	420	190-200	230	Idem
OT400	390	200	25	160		105		90		
Fontă cenuşie Fc 200	230			100		65		85		Rezistențele la tracțiune depind de diametrul probei turnate
Fc 300	320			130		85		110		
Oțel aliat de construcții de maşini 40Cr10	980 - 1180	790	10	360-380						Îmbunătățit
33MoCr11	980 - 1180	780	12	380-520		350		300		Idem

Tabelul 7.1-2

Natura deformației şi a factorului efectiv de concentrare a tensiunii	K
I. Încovoiere şi întindere:	
1. Canelură semicirculară la un arbore; raportul dintre raza canelurii şi diametrul arborelui	
0,1	2,0
0,5	1,6
1,0	1,2
2,0	1,1
2. Canelură semicirculară Raportul dintre raza canelurii complete şi înălțimea secțiunii (diametrul arborelui)	
0,0625	1,75
0,125	1,50
0,25	1,20
0,5	1,10
3. Variația secțiunii sub unghi drept	2,0
4. Canelură în V	3,0
5. Filet Withworth	2,0
6. Filet metric	2,5
7. Orificii, atunci când raportul dintre diametrul orificiului şi dimensiunea transversală a secțiunii este de la 0,1 la 0,33	2,0
8. Zgârieturi produse de cuțit pe suprafața piesei	1,2-1,4
II. Răsucire	
1. Canelură semicirculară când raportul dintre raza canelurii şi diametrul minim al arborelui este:	
0,02	1,8
0,10	1,2
0,20	1,1
2. Caneluri pentru pene	1,6-2,0

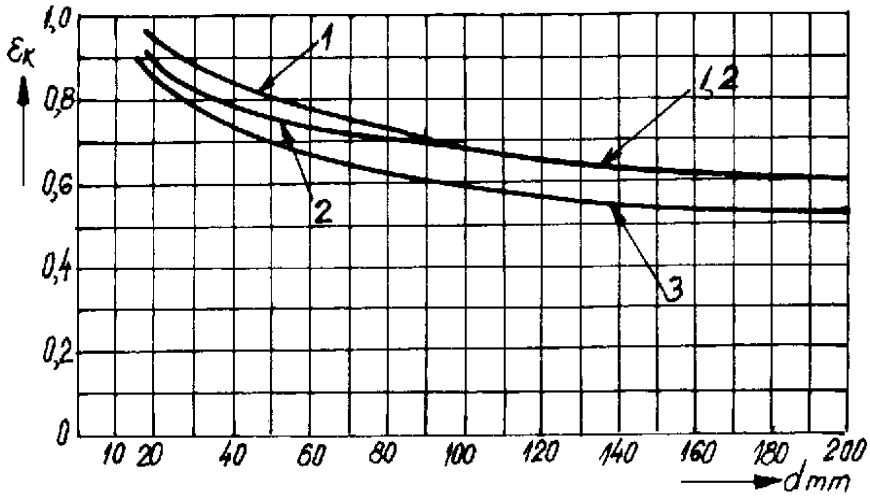
- ***Dimensiunea piesei.*** Dimensiunea piesei influențează rezistența la oboseală a piesei prin **coeficientul dimensional** (de mărime) **ε**, (ε_σ, ε_τ), determinat şi el experimental şi prezentat sub formă de diagrame. În Fig.7.1-1 se prezintă variația coeficientului dimensional ε pentru piese de secțiune circulară.
- ***Gradul de prelucrare al suprafeței,*** de asemenea influențează rezistența la oboseală a unei piese. În calcule intervine prin **coeficientul de stare al suprafeței**, γ.

În Fig.7.1-2 se prezintă valorile coeficientului de stare al suprafeței, pentru piese din oțel solicitate la încovoiere.

Cei trei factori prezentați, pot fi grupați într-un **factor global** de influență a rezistenței la oboseală $(K_\sigma)_D$, respectiv $(K_\tau)_D$ care au expresiile:

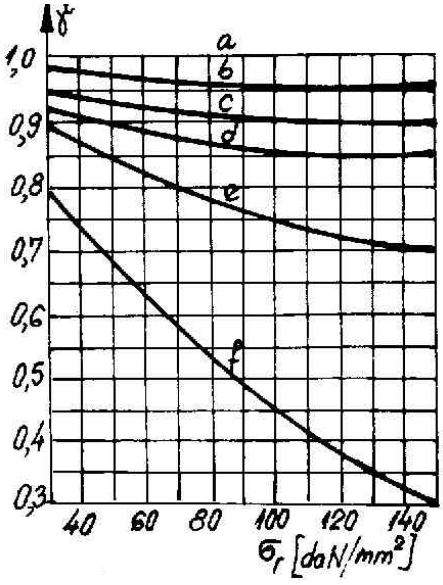
$$(K\sigma)_D = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} \qquad 7.1\text{-}4a$$

$$(K\tau)_D = \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \qquad 7.1\text{-}4b$$



1 – Piese din oțel carbon solicitate la încovoiere
2 - Piese din oțel solicitate la torsiune
3 - Piese din oțel aliat supuse la încovoiere

Fig.7.1-1



a – suprafață lustruită
b – şlefuire fină sau prelucrare fină cu cuțitul
c – şlefuire brută sau strunjire brută
d – suprafață laminată cu crustă
e – piesă supusă coroziunii în apă dulce
f – piesă supusă coroziunii în apă sărată

Fig.7.1-2

Elementele unui ciclu de solicitare, sunt:

- tensiunea maximă (σ_{max}, τ_{max}) sau limita superioară a tensiunii
- tensiunea minimă (σ_{min}, τ_{min}) sau limita inferioară a tensiunii
- tensiunea medie (σ_m, τ_m):

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad ; \quad \tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} \qquad 7.1\text{-}5$$

- amplitudinea tensiunii sau a ciclului (σ_{am}, τ_{am}):

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad ; \quad \tau_{am} = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} \qquad 7.1\text{-}6$$

- coeficientul de asimetrie al ciclului, R:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad ; \quad R = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} \qquad 7.1\text{-}7$$

Cele mai întâlnite cicluri de solicitare, sunt:

- ciclurile alternat simetrice pentru care

$$\sigma_{max} = |\sigma_{min}|, \quad \sigma_{am} = \sigma_{max}, \quad R = -1$$

- ciclurile pulsante, pentru care $\sigma_{min} = 0$, $\sigma_{am} = \sigma_{max} / 2$, R = 0.

Calculul de rezistență la oboseală, presupune calculul **coeficientului de siguranță la oboseală c** şi compararea lui cu o valoare dinainte stabilită.

În Tabelul 7.1-3 se prezintă valorile recomandate ale coeficientul de siguranță la oboseală pentru unele piese de maşini.

Coeficientul de siguranță la oboseală c, are expresii diferite, în funcție de coeficientul de asimetrie al ciclului de solicitare şi schematizarea utilizată. Astfel,

- pentru cicluri alternant simetrice:

- solicitarea de încovoiere

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} \cdot \sigma_{am}} \qquad 7.1\text{-}8a$$

Tabelul 7.1-3

Materialul şi piesele	**Coeficientul de siguranță c**
Piese de maşini confecționate din oțel	1,5 ... 1,7
Piese de maşini uşoare, din oțel	1,3 ... 1,4
Piese importante din oțel când încercarea la oboseală s-a făcut chiar pe piesă	1,35
Piese din oțel turnat	1,4 ... 2,0
Piese din fontă	2 ... 3
Piese din aliaje de cupru	2 ... 2,7
Piese din aliaje uşoare	2 ... 2,5

- solicitarea de torsiune

$$c_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \tau_{am}} \qquad 7.1\text{-}8b$$

♦ pentru cicluri alternante:

✓ schematizarea Goodman,

- solicitarea de încovoiere

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} \cdot \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_r}} \qquad 7.1\text{-}9a$$

- solicitarea de torsiune

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \frac{\tau_{am}}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_r}} \qquad 7.1\text{-}9b$$

✓ schematizarea Soderberg,

- solicitarea de încovoiere

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} \cdot \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}} \qquad 7.1\text{-}10a$$

- solicitarea de torsiune

$$c_\tau = \frac{1}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \frac{\tau_{am}}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_c}} \qquad 7.1\text{-}10b$$

✓ schematizarea Serensen

- solicitarea de încovoiere

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} \cdot \sigma_{am} + \Psi_\sigma \cdot \sigma_m} \qquad 7.1\text{-}11a$$

unde:

$$\Psi_\sigma = \frac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \qquad 7.1\text{-}11b$$

- solicitarea de torsiune

$$c_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \tau_{am} + \Psi_\tau \cdot \tau_m} \qquad 7.1\text{-}12a$$

unde:

$$\Psi_\tau = \frac{2 \cdot \tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} \qquad 7.1\text{-}12b$$

În cazul solicitării compuse de încovoiere şi torsiune, coeficientul de siguranță c, se calculează cu relația:

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} \qquad 7.1\text{-}13$$

sau utilizând diagrama din Fig.7.1-3.

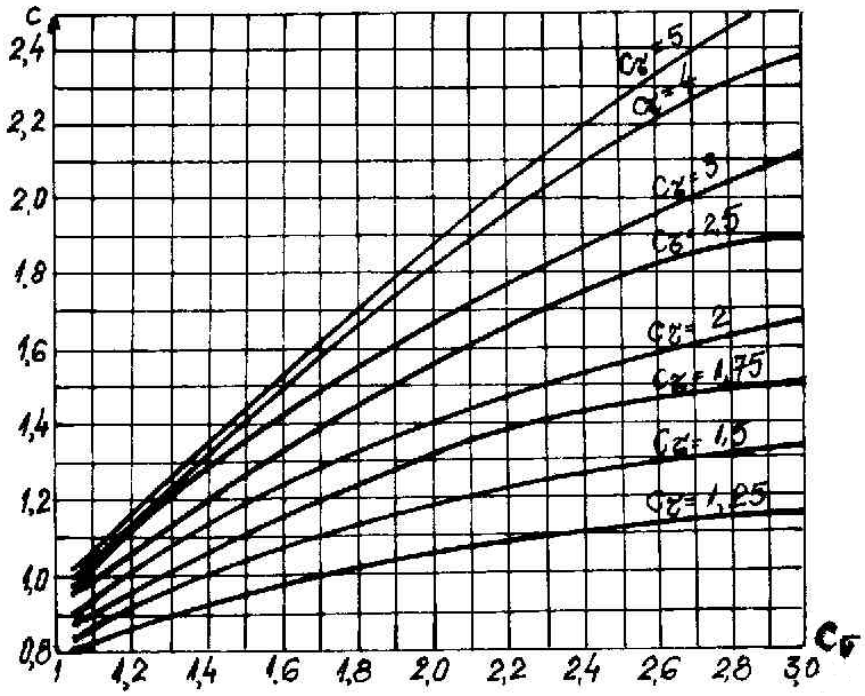


Fig.7.1-3

În cazul pieselor care au o durată de funcționare limitată, adică mai mică decât numărul de cicluri care ar produce ruperea prin oboseală (N_0), coeficientul de siguranță nu se mai calculează față de rezistența la oboseală σ_{-1}. În acest caz, se efectuează un ***calcul la durabilitate.***

În curba rezistențelor la oboseală a materialului (curba Wőhler) în coordonate semilogaritmice (Fig.7.1-4) corespunzătoare coeficientului de asimetrie R a ciclului real de solicitare, se duce

coordonata NML_1 corespunzătoare duratei de funcționare (a numărului de cicluri) N, a piesei. Solicitarea reală a piesei este reprezentată de către punctul M, căruia îi corespunde tensiunea maximă σ_{max}. Ordonata σ_L a punctului limită L_1 se numeşte **rezistența la oboseală pentru N cicluri** sau **rezistența de durată.**

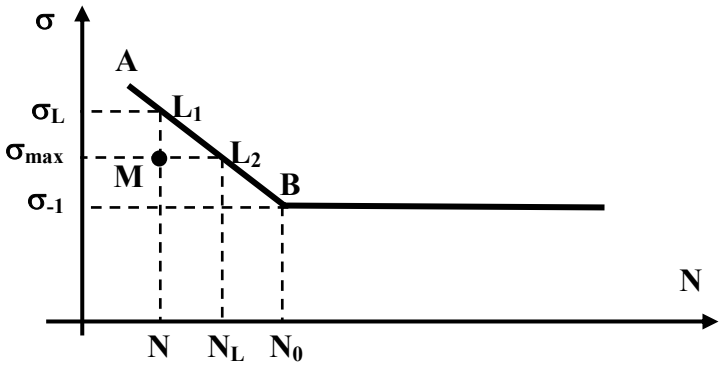


Fig.7.1-4

Pe ordonata ce trece prin punctul M (dus la nivelul lui σ_{max}) se obține punctul L_2 a cărui abscisă N_L reprezintă **numărul de cicluri la care piesa se rupe la tensiunea σ_{max}** sau **durata de viață corespunzătoare tensiunii σ_{max}.**

Linia AB a curbei Wőhler, reprezintă porțiunea de **durabilitate limitată.**

Corespunzător celor două situații, dacă solicitarea reală din piesă este definită de punctul M(σ_{max}; N), se definesc doi coeficienți de siguranță:

- ***coeficientul de siguranță față de rezistența de durată limitată:***
  - pentru încovoiere

$$c_\sigma = \frac{\sigma_L}{\sigma_{max}} \qquad 7.1\text{-}14a$$

  - pentru torsiune

$$c_\tau = \frac{\tau_L}{\tau_{max}} \qquad 7.1\text{-}14b$$

♦ ***coeficientul de siguranță la durabilitate:***

➢ pentru încovoiere şi torsiune

$$c_N = \frac{N_L}{N} \qquad 7.1\text{-}15$$

Pentru solicitarea de torsiune, N_L şi N se obțin din curba Wőhler trasată pentru solicitarea de torsiune.

Dacă se cunoaşte ecuația curbei Wőhler care are forma:

$$N \cdot \sigma^m = N_0 \cdot \sigma_{-1}^m \qquad 7.1\text{-}16$$

unde:

N, σ - sunt coordonatele (număr de cicluri, tensiune) unui punct curent de pe linia AB (Fig.7.1-4)

N_0, σ_{-1} - coordonatele punctului B (Fig.7.1-4),

atunci se poate calcula coeficientul de siguranță c_σ pentru un număr de cicluri N dat, la o solicitare de amplitudine σ_{am} cu relația:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{am}} \cdot \left(\frac{N_0}{N}\right)^{1/m} \qquad 7.1\text{-}17$$

În relația 7.1-17, pentru oțeluri se pot lua: $N_0 = 10^6 \ldots 5 \cdot 10^6$ cicluri şi m = 9. Cu toate că **m** are o dispersie destul de mare (m = 2 ... 12), valorile calculate pentru σ variază însă puțin cu **m**, motiv pentru care se poate lua m = 9 sau m = 6.

Pentru calculul la solicitări variabile ale elementelor de rezistență, se recomandă parcurgerea următoarelor **etape:**

În prima etapă, cu ajutorul calculelor obişnuite, se efectuează un calcul de rezistență static (verificare, dimensionare sau efort capabil). După ce s-a sigurat condiția de rezistență la solicitarea considerată statică, se trece la calculul la oboseală, care este un calcul de verificare, determinându-se coeficientul de siguranță la oboseală şi compararea acestuia cu valorile indicate.

Calculul de oboseală impune parcurgerea următoarelor **etape**:

- Se stabilesc solicitările variabile la care este supusă piesa şi secţiunile periculoase la oboseală (la nevoie se trasează diagramele de eforturi).
- Se stabilesc eforturile din secţiunile considerate periculoase.
- Se calculează tensiunile maxime şi minime din secţiunea periculoasă (eventual acestea sunt cunoscute de la calculul de rezistenţă - prima etapă).
- Se determină elementele ciclului de solicitare: σ_{am}, σ_m, τ_{am}, τ_m, R.
- Se alege formula de calcul pentru coeficientul de siguranţă (vezi relaţiile 7.1-8 ... 7.1-12).
- Se determină caracteristicile mecanice şi rezistenţa la oboseală a materialului piesei: σ_c, σ_r, σ_{-1}, σ_0, τ_c, τ_r, τ_{-1}, τ_0 (din diagrame sau tabele).
- Se determină valoarea coeficienţilor de influenţă ai rezistenţei la oboseală: K_σ, ε_σ, K_τ, ε_τ, γ (din diagrame sau tabele) sau factorul global de influenţă: $(K_\sigma)_D$, $(K_\tau)_D$ (vezi relaţiile 7.1-4a,b).
- Se calculează coeficientul de siguranţă pentru fiecare solicitare variabilă (cu relaţiile deja stabilite).
- Dacă solicitarea variabilă este o solicitare compusă de categoria a II-a (încovoiere şi torsiune), se calculează coeficientul de siguranţă la solicitarea compusă (rel. 7.1-13), care apoi se compară cu valorile recomandate (vezi tabelul 7.1-3) şi se trage concluzia corespunzătoare.

7.2 Modele de probleme rezolvate

7.2.1 *Să se verifice la oboseală un arbore de oțel de secțiune circulară cu diametrul d = 80 mm, solicitat la încovoiere şi torsiune de momentele:* $M_{i,max}$ *= 3 kN·m,* $M_{i,min}$ *= - 2 kN·m,* $M_{t,max}$ *= 4 kN·m,* $M_{t,min}$ *= -1 kN·m.*

Pentru materialul arborelui se cunosc: σ_{-1} *= 310 MPa,* σ_0 *= 500 MPa,* τ_{-1} *= 180 MPa,* τ_0 *= 250 MPa,* $(K_\sigma)_D$ *= 1,8 ,* $(K_\tau)_D$ *= 2,2.*

Rezolvare:

Se parcurg etapele recomandete.

- Arborele este supus la o solicitare variabilă compusă (încovoiere şi torsiune).
- Eforturile variabile din secțiunea periculoasă sunt:

$M_{i,max}$ = 3 kN·m $\qquad$ $M_{i,min}$ = - 2 kN·m

$M_{t,max}$ = 4 kN·m $\qquad$ $M_{t,min}$ = -1 kN·m

- Tensiunile maxime şi minime din secțiune sunt:
  - pentru încovoiere

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i,max}}{W_z} = 60 \ \text{MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{i,min}}{W_z} = -40 \ \text{MPa}$$

  - pentru torsiune

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{W_p} = 40 \ \text{MPa}$$

$$\tau_{min} = \frac{M_{t,min}}{W_p} = -10 \ \text{MPa}$$

- Elementele ciclurilor de solicitare sunt:
  - pentru încovoiere

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \frac{60 + (-40)}{2} = 10 \ \text{MPa}$$

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{60 - (-40)}{2} = 50 \ \text{MPa}$$

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{-40}{60} = -0{,}66 \ \Rightarrow \ \text{ciclu alternant asimetric}$$

- pentru torsiune

$$\tau_m = \frac{40 + (-10)}{2} = 15 \ \text{MPa}$$

$$\tau_{am} = \frac{40 - (-10)}{2} = 25 \ \text{MPa}$$

$$R = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}} = \frac{-10}{40} = -0{,}25 \ \Rightarrow \ \text{ciclu alternant asimetric}$$

- Relațiile de calcul alese pentru coeficientul de siguranță, sunt:
  - pentru încovoiere

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(K_\sigma)_D \cdot \sigma_{am} + \Psi_\sigma \cdot \sigma_m}$$

  - pentru torsiune

$$c_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(K_\tau)_D \cdot \tau_{am} + \Psi_\tau \cdot \tau_m}$$

- Se calculează coeficienții:

$$\Psi_\sigma = \frac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{2 \cdot 310 - 500}{500} = 0{,}24$$

$$\Psi_\tau = \frac{2\cdot\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = \frac{2\cdot 180 - 250}{250} = 0{,}44$$

- Cunoscând (din enunț) caracteristicile mecanice, rezistențele la oboseală şi factorii globali de influență a rezistenței la oboseală, se calculează valorile numerice ale coeficienților de siguranță pentru fiecare solicitare variabilă:
  - pentru încovoiere

$$c_\sigma = \frac{310}{1{,}8\cdot 50 + 0{,}24\cdot 10} = 3{,}34$$

  - pentru torsiune

$$c_\tau = \frac{180}{2{,}2\cdot 25 + 0{,}44\cdot 15} = 2{,}92$$

- Solicitarea variabilă fiind una compusă de categoria a II-a, se calculează coeficientul de siguranță global:

$$c = \frac{c_\sigma\cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{3{,}34\cdot 2{,}92}{\sqrt{3{,}34^2 + 2{,}92^2}} = 2{,}198$$

- A rezultat un coeficient de siguranță satisfăcător.

7.2.2 *Un arbore cu secțiunea circulară de diametru d = 50 mm, este solicitat de eforturile variabile:* $M_{i,max}$ *= 70 kN·cm,* $M_{i,min}$ *= 0,* $M_{t,max}$ *= 60 kN·cm,* $M_{t,min}$ *= - 60 kN·cm. Să se verifice arborele, ştiind că este confecționat din oțel pentru care se conosc:* σ_{-1} *= 250 MPa,* τ_{-1} *= 150 MPa,* σ_0 *= 400 MPa,* τ_0 *= 300 MPa,* $(K_\sigma)_D$ *= 2,7 ,* $(K_\tau)_D$ *= 2,9 iar coeficientul de siguranță minim admis este* c_a *= 1,5.*

Rezolvare:

- Arborele este supus la o solicitare compusă variabilă de categoria a II-a.
- Eforturile din secțiunea periculoasă sunt:

$M_{i,max} = 70$ kN·cm $\qquad M_{i,min} = 0$
$M_{t,max} = 60$ kN·cm $\qquad M_{t,min} = -60$ kN·cm

- Tensiunile maxime şi minime din secțiune, sunt:
  - pentru încovoiere

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i,max}}{W_z} = 57 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{i,min}}{W_z} = 0 \text{ MPa}$$

  - pentru torsiune

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{W_p} = 24{,}5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{min} = \frac{M_{t,min}}{W_p} = -24{,}5 \text{ MPa}$$

- Elementele ciclurilor de solicitare sunt:
  - pentru încovoiere

$$\sigma_m = \frac{57+0}{2} = 28{,}5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{am} = \frac{57-0}{2} = 28{,}5 \text{ MPa}$$

$$R = \frac{0}{57} = 0 \Rightarrow \text{ciclu pulsant}$$

  - pentru torsiune

$$\tau_m = \frac{24,5 + (-24,5)}{2} = 0 \text{ MPa}$$

$$\tau_{am} = \frac{24,5 - (-24,5)}{2} = 24,5 \text{ MPa}$$

$$R = \frac{-24,5}{24,5} = -1 \Rightarrow \text{ciclu alternant simetric}$$

- Relațiile de calcul pentru coeficientul de siguranță, sunt:
  - pentru încovoiere

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(K_\sigma)_D \cdot \sigma_{am} + \Psi_\sigma \cdot \sigma_m}$$

  - pentru torsiune

$$c_\tau = \frac{\sigma_{-1}}{(K_\tau)_D \cdot \tau_{am}} \quad (\text{ciclu alternant simetric})$$

- Se calculează coeficientul:

$$\Psi_\sigma = \frac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{2 \cdot 250 - 400}{400} = 0,25$$

- Cunoscând (din enunț) rezistențele la oboseală şi factorii globali de influență ai rezistenței la oboseală, se poate calcula valoarea coeficienților de siguranță pentru cele două solicitări variabile:
  - pentru încovoiere

$$c_\sigma = \frac{250}{2,7 \cdot 28,5 + 0,24 \cdot 28,5} = 2,98$$

  - pentru torsiune

$$c_\tau = \frac{150}{2{,}9 \cdot 24{,}5} = 2{,}11$$

♦ Pentru solicitarea compusă variabilă, coeficientul de siguranță este:

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{2{,}98 \cdot 2{,}11}{\sqrt{2{,}98^2 + 2{,}11^2}} = 1{,}72 > c_a = 1{,}5$$

♦ Condiția de rezistență la oboseală este satisfăcută.

7.2.3 *Să se verifice la oboseală pentru* c_a *= 1,5 fusul din Fig.7.2.3-1, confecționat din OL 50, având suprafața fin șlefuită și el lucrează în aer uscat.*

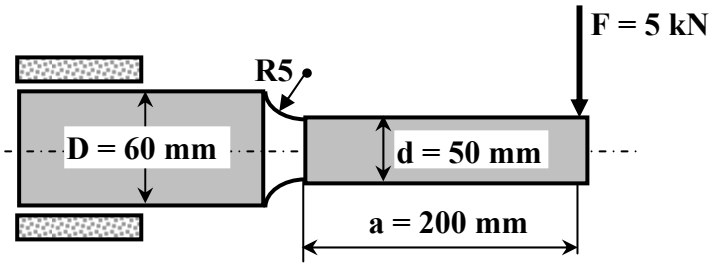


Fig.7.2.3-1

Rezolvare:

♦ Fusul fiind un organ de mașină rotativ, așa cum este solicitat de forța F (Fig.7.2.3-1), este supus unei solicitări de încovoiere rotativă.

♦ Secțiunea periculoasă este în zona de trecere de la diametrul **d** la diametrul **D** (vezi și diagrama M_i din Fig.7.2.3-2).

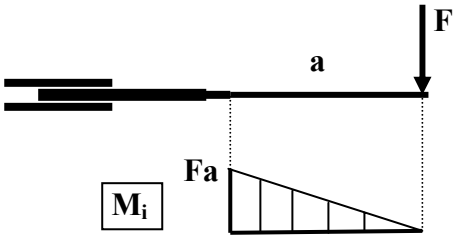


Fig.7.2.3-2

♦ Efortul din secțiunea periculoasă este:

$$M_{iz} = F \cdot a$$

♦ Tensiunea maximă şi minimă din secțiunea periculoasă este:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{W_z} = \frac{Fa}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = 81{,}6 \ \ MPa$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{iz}}{W_z} = -\frac{Fa}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = -81{,}6 \ \ MPa$$

♦ Ciclul de solicitare are următoarele elemente:

$$\sigma_m = \frac{81{,}6 + (-81{,}6)}{2} = 0 \ \ MPa$$

$$\sigma_{am} = \frac{81{,}6 - (-81{,}6)}{2} = 81{,}6 \ \ MPa$$

$$R = \frac{-81{,}6}{81{,}6} = -1 \Rightarrow \text{ ciclu alternant simetric}$$

♦ Pentru ciclul alternant simetric, solicitare de încovoiere, relația de calcul este:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} \cdot \sigma_{am}} = \frac{\sigma_{-1}}{(K_\sigma)_D \cdot \sigma_{am}}$$

♦ Caracteristicile de material şi factorii de influență, determinați din diagrame, au valorile:

$\sigma_{-1} = 240$ MPa
$K_\sigma = 1{,}45$ $\varepsilon_\sigma = 0{,}86$ $\gamma = 0{,}93$

♦ Coeficientul de siguranță la oboseală, are valoarea:

$$c_\sigma = \frac{240}{\frac{1,45}{0,86 \cdot 0,93} \cdot 81,6} \approx 1,54 > c_a = 1,5$$

- Condiția impusă pentru fenomenul de oboseală este satisfăcută.

7.2.4 *Un arbore din OL 60, de secțiune circulară de diametru d = 60 mm şi deschidere* a *= 1 m (Fig.7.2.4-1), are montat la mijloc un volant de greutate Q = 3 kN. Arborele este acționat de un motor electric cu puterea P = 50 KW la o turație n = 955 rot/min, având porniri şi opriri dese. Se cere să se verifice arborele la oboseală.*

Se cunosc: σ_{-1} *= 310 MPa*, τ_{-1} *= 180 MPa*, τ_0 *= 250 MPa*, $(K_\sigma)_D$ *= 3,63* , $(K_\tau)_D$ *= 2,6.*

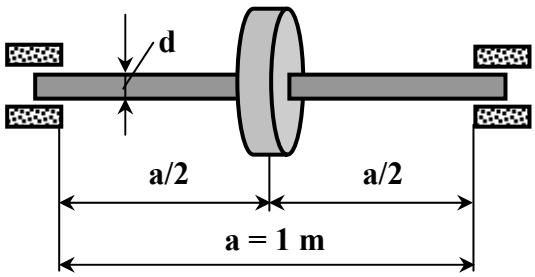


Fig.7.2.4-1

Rezolvare:

- Arborele este supus la o solicitare compusă variabilă (încovoiere şi torsiune).
- Eforturile din secțiunea periculoasă, sunt (vezi Fig.7.2.4-2):

$$M_{i,max} = \left|M_{i,min}\right| = \frac{Q \cdot a}{4} = 75 \cdot 10^4 \ \ N \cdot mm$$

$$M_{t,max} = 9,55 \cdot \frac{P}{n} = 9,55 \cdot \frac{50}{955} = 50 \cdot 10^4 \ \ N \cdot mm$$

$$M_{t,min} = 0$$

- Momentul de torsiune, prin porniri şi opriri repetate, variază de la $M_{t,min} = 0$ la $M_{t,max}$.

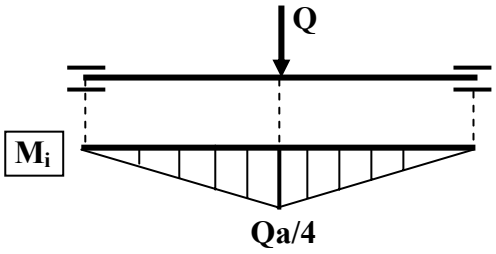


Fig.7.2.4-2

- Tensiunile maxime şi minime, sunt:

  - pentru încovoiere

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i,max}}{W_z} = 35{,}4 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_{min} = -\sigma_{max} = -35{,}4 \quad \text{MPa}$$

  - pentru torsiune

$$\tau_{max} = \frac{M_{t,max}}{W_p} = 11{,}9 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_{min} = \frac{M_{t,min}}{W_p} = 0 \quad \text{MPa}$$

- Elementele ciclurilor de solicitare sunt:

  - pentru încovoiere

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 0 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 35{,}4 \quad \text{MPa}$$

$$R = \frac{-35,4}{35,4} = -1 \Rightarrow \text{ciclu alternant simetric}$$

➢ pentru torsiune

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = 5,95 \ \text{MPa}$$

$$\tau_{am} = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = 5,95 \ \text{MPa}$$

$$R = \frac{0}{11,9} = 0 \Rightarrow \text{ciclu pulsant}$$

♦ Relațiile de calcul pentru coeficienții de siguranță sunt:

➢ pentru încovoiere

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(K_\sigma)_D \cdot \sigma_{am}}$$

➢ pentru torsiune

$$c_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(K_\tau)_D \cdot \tau_{am} \cdot \Psi \cdot \tau_m}$$

♦ Se calculează coeficientul:

$$\Psi_\tau = \frac{2 \cdot \tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = 0,44$$

♦ Cunoscând rezistențele la oboseală şi factorii globali de influență (din enunțul problemei), se pot calcula valorile coeficienților de siguranță:

➢ pentru încovoiere

$$c_\sigma = \frac{310}{3{,}65 \cdot 35{,}4} = 2{,}4$$

- pentru torsiune

$$c_\tau = \frac{180}{2{,}6 \cdot 5{,}95 + 0{,}44 \cdot 5{,}95} = 9{,}9$$

- Pentru solicitarea compusă variabilă, coeficientul de siguranță este:

$$c = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{2{,}4 \cdot 9{,}9}{\sqrt{2{,}4^2 + 9{,}9^2}} = 2{,}33$$

S-a obținut un coeficient de siguranță la oboseală satisfăcător pentru arbore.

8. APLICAȚII

În acest capitol se propun o serie de probleme pentru a fi rezolvate. Rezolvându-le se însuşesc cunoştințele necesare şi se dobândesc deprinderile pentru abordarea unor astfel de probleme.

Prezentându-se şi rezultatele finale şi pe alocuri unele indicații sau rezultate intermediare, rezolvitorul are la dispoziție un material de un real folos.

Pentru rezolvarea problemelor din acest capitol vă recomandăm următoarele:

- Asigurați-vă că după parcurgerea primelor 7 capitole ați înțeles modul de abordare al fiecărui tip de problemă şi că parcurgerea etapelor nu ridică nici un obstacol
- Încadrați problema pe care doriți să o rezolvați în capitolul căruia îi aparține
- Căutați în acest capitol etapele de rezolvare ce trebuie urmate
- Citiți pe rând fiecare etapă şi efectuați ce vi se recomandă, până la obținerea rezultatului final
- Confruntați rezultatele obținute cu cele indicate la subcapitolul Răspunsuri ale acestui capitol
- Rezolvați mai multe probleme din fiecare capitol
- După rezolvarea unui număr suficient de mare de probleme, încercați să rezolvați următoarele probleme fără a mai recurge la citirea etapelor indicate
- Dacă puteți rezolva acum problemele singuri fără apelarea etapelor de rezolvare, întradevăr ați ajuns la un nivel corespunzător şi sunteți pe un drum bun. În caz contrar, rezolvați mai multe probleme. Rezolvați în continuare toate problemele propuse în acest capitol şi puteți aborda şi probleme din alte tratate.

Vă dorim mult succes în rezolvarea problemelor din această lucrare şi să obțineți rezultatele finale, dacă este posibil, din prima încercare.

A. ENUNȚURI

8.1 CALCULUL DE REZISTENȚĂ LA ÎNCOVOIERE OBLICĂ ŞI SOLICITĂRI COMPUSE

8.1.1 Încovoiere oblică şi solicitarea compusă de categoria I

8.1.1-1

Pentru bara de secțiune dreptunghiulară din Fig.8.1.1-1 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) sarcina capabilă (p = ?) pentru σ_a = 160 MPa
c) diagrama tensiunii σ în secțiunea cea mai solicitată.

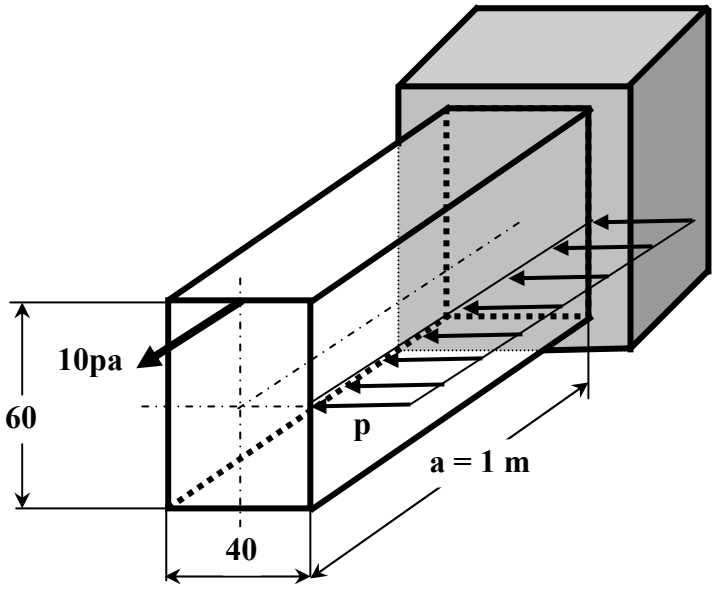


Fig.8.1.1-1

8.1.1-2

Pentru bara din Fig.8.1.1-2 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i

b) tensiunile normale maxime
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 2,8 kN, t = 16 mm.

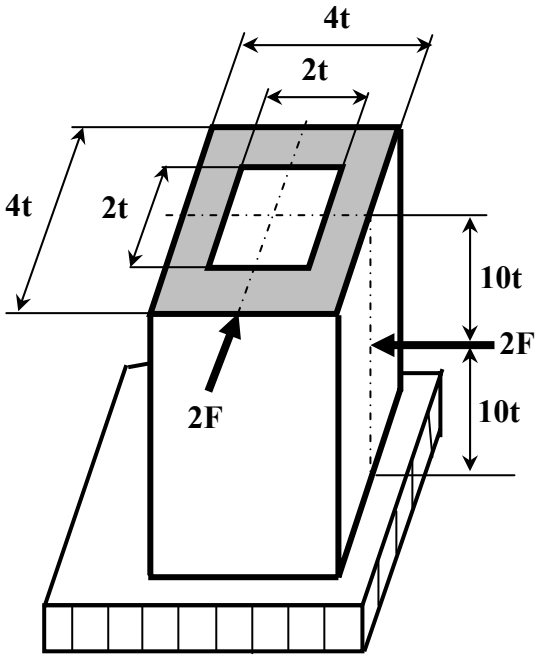


Fig.8.1.1-2

8.1.1-3

Pentru bara din oțel din Fig.8.1.1-3 şi F = 86 kN se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) verificarea rezistenței barei pentru σ_a = 150 MPa
c) diagrama tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

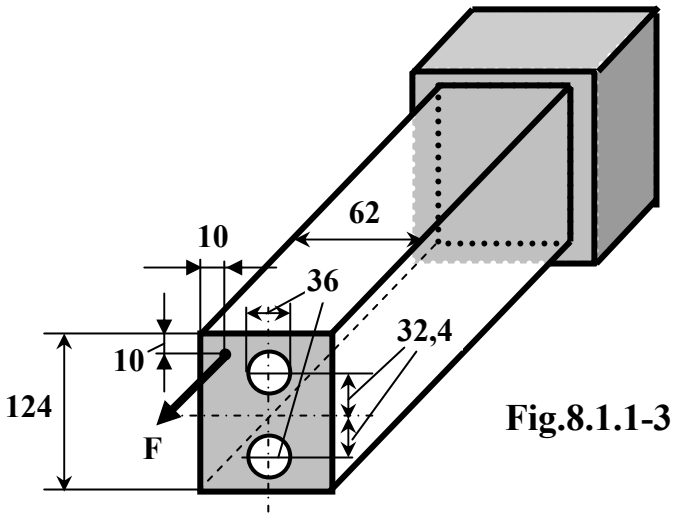


Fig.8.1.1-3

8.1.1-4

Pentru bara cu forma şi încărcarea din Fig.8.1.1-4 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) tensiunea normală maximă
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

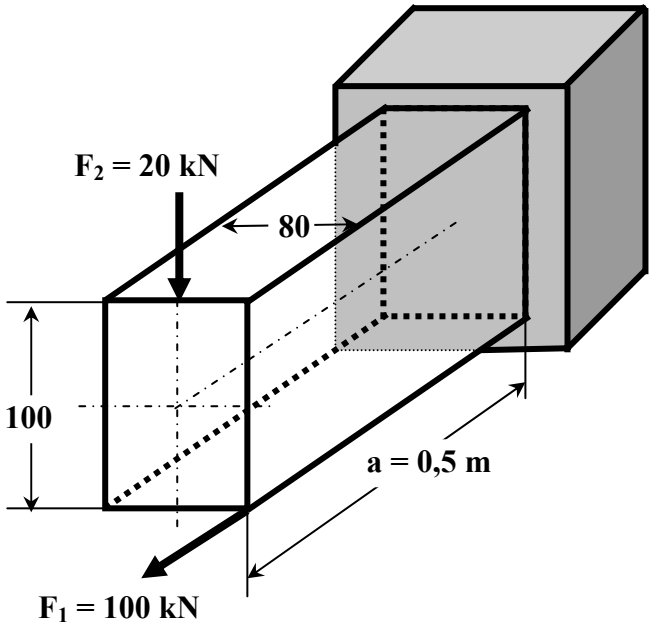


Fig.8.1.1-4

8.1.1-5

Pentru bara cu forma şi încărcarea din Fig.8.1.1-5 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) verificarea condiției de rezistență pentru σ_{at} = 40 MPa şi σ_{ac} = -90 MPa
c) diagrama tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

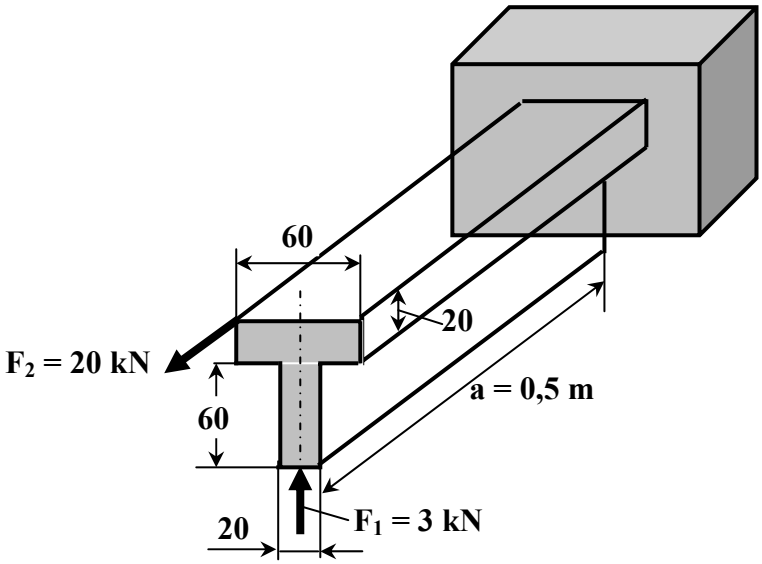


Fig.8.1.1-5

8.1.1-6

Pentru bara din Fig.8.1.1-6 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) dimensiunile secțiunii transversale pentru σ_a = 160 MPa
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

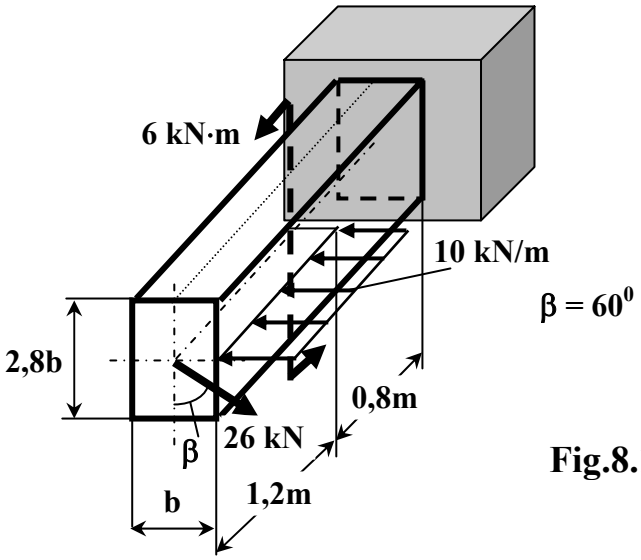


Fig.8.1.1-6

8.1.1-7

Pentru bara din Fig.8.1.1-7 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) tensiunea normală în funcție de forța F din punctele B, C şi T situate în secțiunea periculoasă
c) forța capabilă (F = ?) pentru σ_a = 150 MPa.

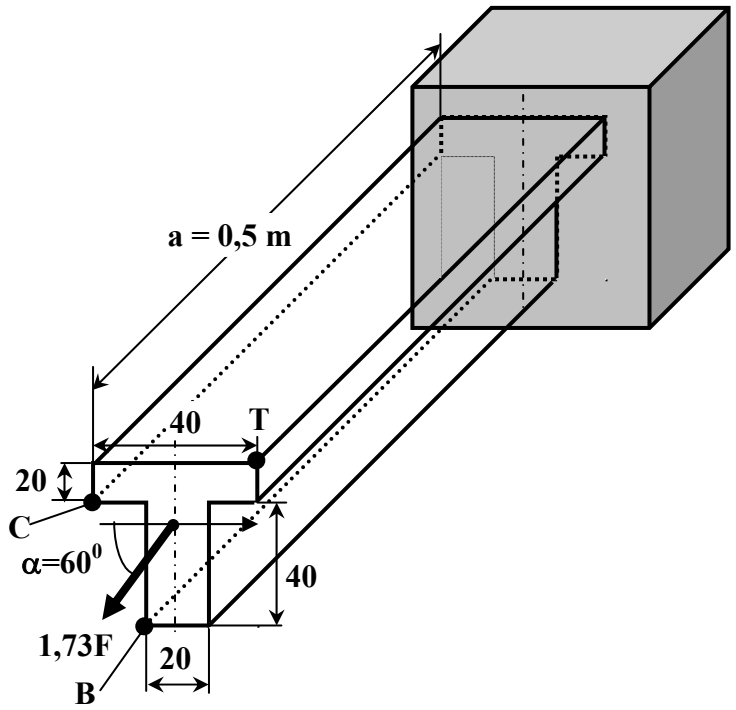


Fig.8.1.1-7

8.1.1-8

Pentru bara din Fig.8.1.1-8 cu p = 50 kN/m, se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) tensiunile normale maxime
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

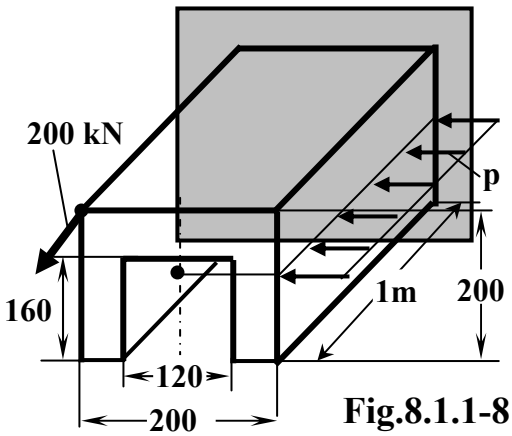


Fig.8.1.1-8

8.1.1-9

Pentru bara din Fig.8.1.1-9 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) dimensionarea secțiunii transversale a barei pentru σ_{at} = 30 MPa şi σ_{ac} = 120 MPa
c) diagrama de variație a tensiunii normale σ în secțiunea din încastrare.

Se cunosc: F = 10,6 kN, p = 8,6 kN/m, a = 0,8 m.

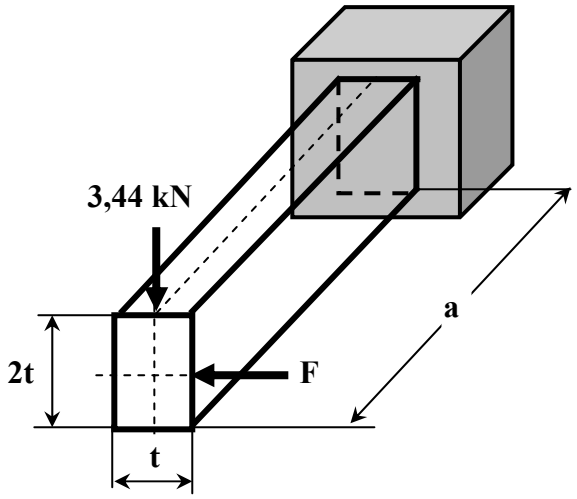


Fig.8.1.1-9

8.1.1-10

Pentru bara din Fig.8.1.1-10 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) valoarea forței F pentru σ_a = 113 MPa
c) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunoaşte a = 60 mm.

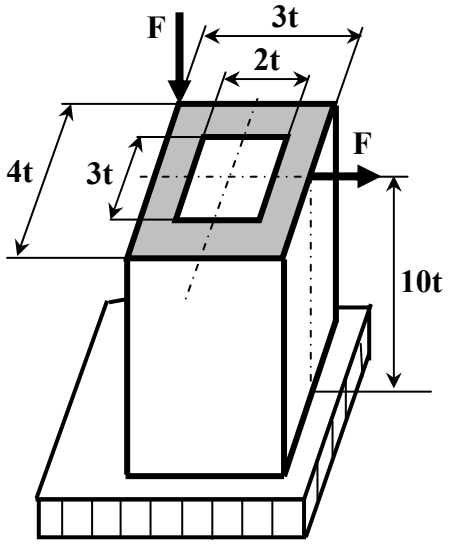


Fig.8.1.1-10

8.1.1-11

Pentru bara din Fig.8.1.1-11 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) forța capabilă pentru σ_a = 120 MPa
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

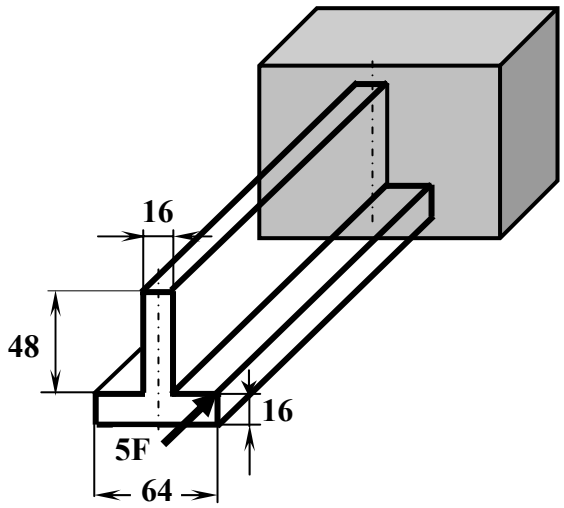


Fig.8.1.1-11

8.1.1-12

Pentru bara din Fig.8.1.1-12 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) tensiunile normale maxime
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

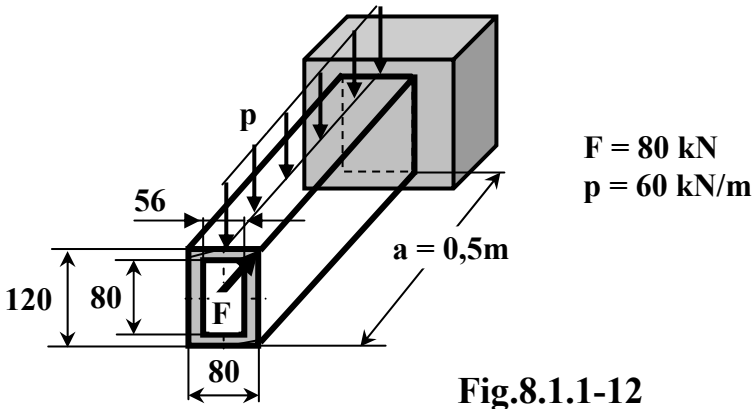


Fig.8.1.1-12

8.1.1-13

Pentru bara din Fig.8.1.1-13 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) tensiunile normale maxime
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

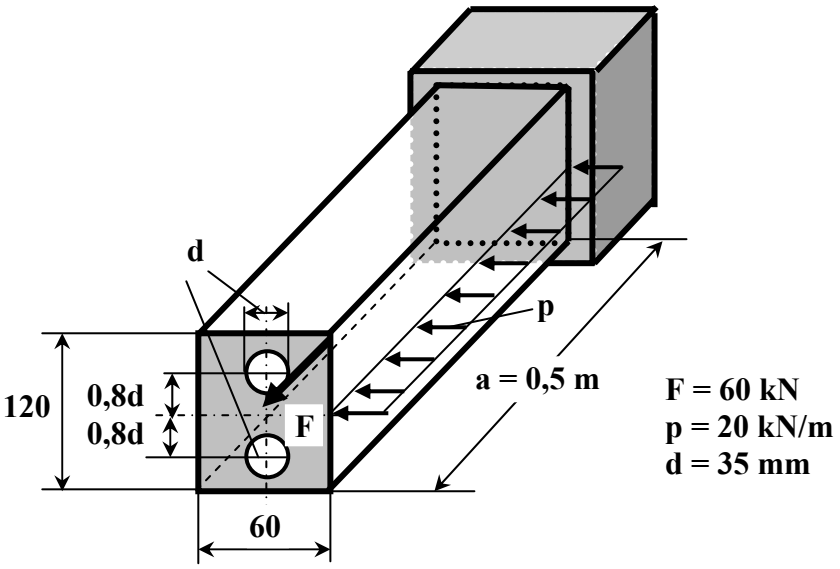


Fig.8.1.1-13

8.1.1-14

Pentru bara din Fig.8.1.1-14 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) tensiunile normale maxime
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F_1 = 60 kN, F_2 = 15 kN, d = 50 mm.

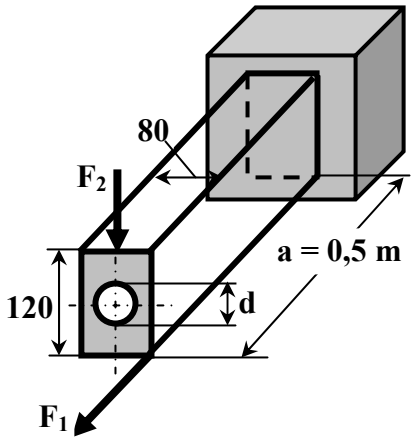


Fig.8.1.1-14

8.1.1-15

Pentru bara din Fig.8.1.1-15 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) tensiunile normale maxime
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F_1 = 60 kN, F_2 = 5 kN, t = 30 mm.

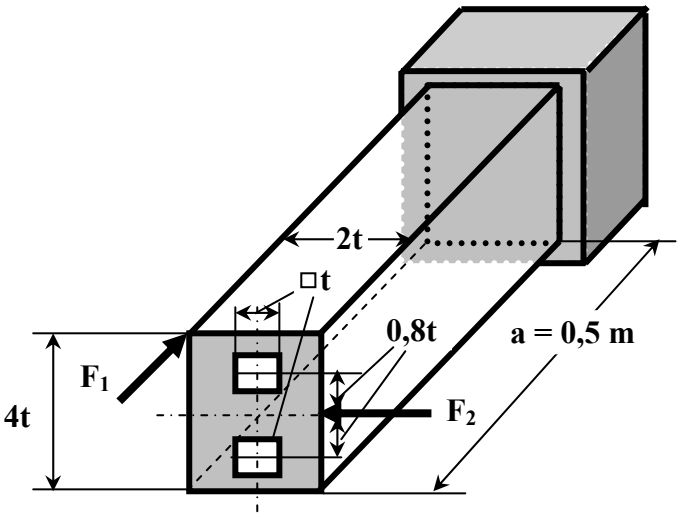


Fig.8.1.1-15

8.1.1-16

Pentru bara din Fig.8.1.1-16 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) forța capabilă pentru σ_a = 160 MPa
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

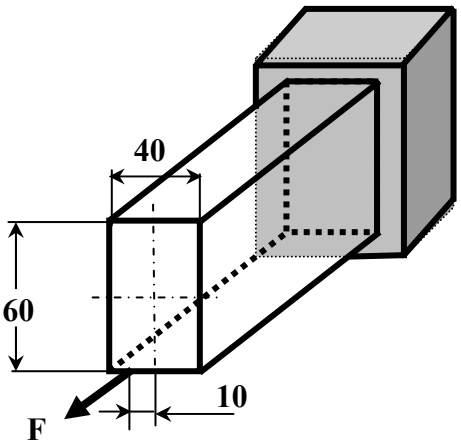


Fig.8.1.1-16

8.1.1-17

Pentru bara din Fig.8.1.1-17 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) tensiunile normale maxime
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

Se cunoaşte: F = 10 kN.

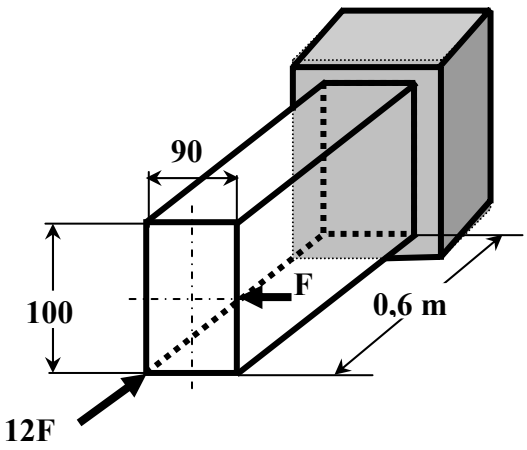


Fig.8.1.1-17

8.1.1-18

O bară de oțel cu secțiunea dreptunghiulară (Fig.8.1.1-18), încastrată la un capăt, este încărcată cu forța P. Se cere:

a. Să se stabilească ce relație trebuie să existe între coordonatele y_F şi z_F ale punctului de aplicație al forței, astfel ca tensiunile din punctele 2 şi 4 să fie egale;
b. Considerând $y_F = b/2$ şi $\sigma_2 = \sigma_4 = 25$ MPa, să se afle tensiunile din punctele 1 şi 2.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Univ. "Politehnica" Bucureşti, 1976)

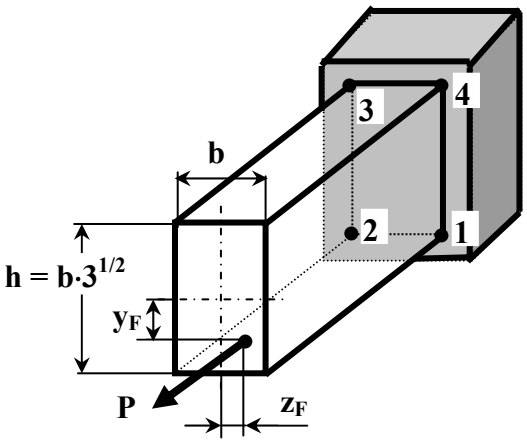


Fig.8.1.1-18

8.1.1-19

Bara din Fig.8.1.1-19 este comprimată excentric de forța P. Se cere:

a) Să se traseze diagramele de eforturi N şi M_i
b) Să se determine sarcina capabilă dacă σ_a = 150 MPa
c) Să se traseze diagrama de variație a tensiunii σ în secțiune.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Univ. "Politehnica" Bucureşti, 1985)

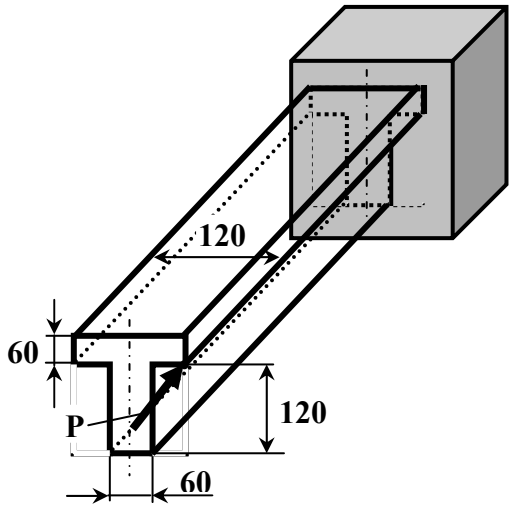


Fig.8.1.1-19

8.1.1-20

O bară având forma şi dimensiunile din Fig.8.1.1-20a este solicitată la întindere cu forța P = 216 kN. Să se determine tensiunile normale maxime de întindere pentru cazurile în care bara are forma din Fig.8.1.1-20 a şi b.

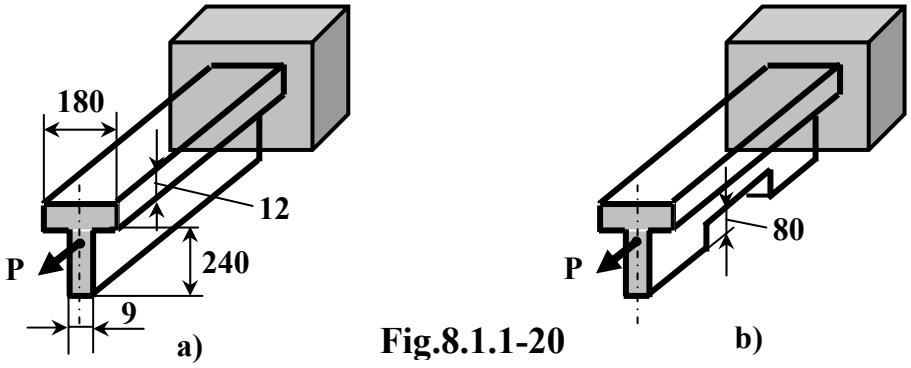


Fig.8.1.1-20

8.1.1-21

Pentru bara de secțiune dreptunghiulară din Fig.8.1.1-21 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) dimensiunea secțiunii pentru σ_{at} = 40 MPa şi σ_{ac} = 120 MPa
c) poziția axei neutre.

Se cunoaşte: F = 20 kN.

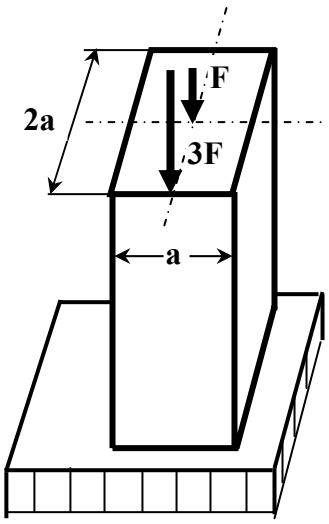


Fig.8.1.1-21

8.1.1-22

Pentru bara de secțiune dreptunghiulară din Fig.8.1.1-22 se cere:

a) diagramele de eforturi N şi M_i
b) tensiunile normale maxime
c) diagrama de variație a tensiunii normale din secțiunea periculoasă.

Se cunoaşte: F = 50 kN, a = 200 mm.

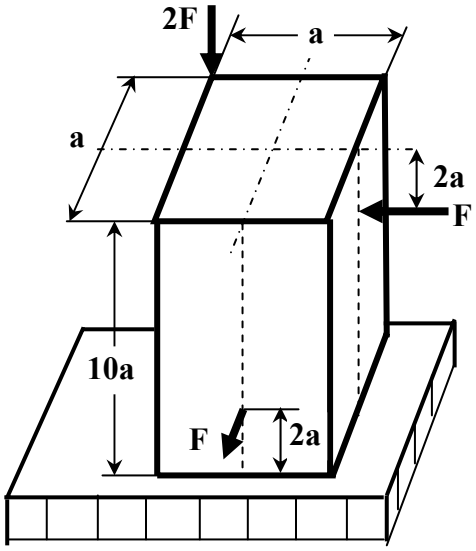


Fig.8.1.1-22

8.1.1-23

Pentru grinzile din oțel indicate în Fig.8.1.1-23 şi conform variantelor indicate în Tabelul 8.1.1-1, se cere:

a) să se traseze diagramele de variație ale momentelor încovoietoare M_{iy} şi M_{iz};
b) să se dimensioneze grinzile utilizând secțiuni dreptunghiulare cu raportul K= h/b indicat în Tabelul 8.1.1-1;
c) pentru secțiunea cea mai solicitată să se traseze diagrama de variație a tensiunilor rezultante σ.

Tabelul 8.1.1-1

Schema	Varianta	F	F_1	p	M	a	l	β	K=h/b	σ_a
		[kN]		[kN/m]	[kN·m]	[m]		[°]		[MPa]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
1	1	9	9	-	-	0,4	0,9	20	1,6	160
	2	7	10	-	-	0,3	0,8	25	1,7	150
	3	5	11	-	-	0,4	0,7	30	1,2	140
	4	4	12	-	-	0,2	0,6	35	1,3	130
	5	8	13	-	-	0,5	0,8	40	1,4	160
	6	6	8	-	-	0,6	0,7	45	1,5	150
2	7	10	-	10	-	0,4	0,7	60	2,2	160
	8	12	-	20	-	0,6	1,0	55	2,5	150
	9	14	-	12	-	0,8	1,4	50	1,6	140
	10	15	-	16	-	0,5	0,8	45	2,8	130
	11	11	-	14	-	0,7	1,2	40	1,8	160
	12	13	-	18	-	0,4	0,9	35	2,4	150
3	13	4	-	6	-	0,4	1,1	20	2,2	110
	14	5	-	8	-	0,6	0,8	25	1,4	120
	15	6	-	4	-	0,8	1,4	30	1,2	160
	16	7	-	5	-	0,5	0,9	35	1,6	150
	17	8	-	7	-	0,7	1,2	40	1,8	140
	18	9	-	3	-	0,9	1,5	45	2,4	130
4	19	8	-	-	20	0,8	1,2	30	2,5	160
	20	12	-	-	15	0,6	0,9	45	2,9	150
	21	15	-	-	22	0,4	0,8	15	2,1	140
	22	16	-	-	12	0,9	1,4	35	2,4	130
	23	13	-	-	18	0,7	1,1	25	2,6	160
	24	11	-	-	16	0,5	1,3	20	2,2	150
5	25	15	-	6	-	0,6	0,8	45	3,5	160
	26	12	-	8	-	0,4	0,6	15	2,5	150
	27	10	-	4	-	0,8	1,2	60	1,5	140
	28	16	-	7	-	0,7	1,0	30	2,4	130
	29	14	-	5	-	0,5	1,1	40	3,2	160
	30	11	-	9	-	0,9	0,9	50	1,8	150
6	31	22	-	12	-	-	1,0	15	1,4	110
	32	12	-	16	-	-	1,2	30	1,2	120
	33	30	-	14	-	-	1,4	20	1,5	160
	34	20	-	18	-	-	1,6	25	1,6	150
	35	24	-	13	-	-	1,1	35	1,8	140
	36	18	-	15	-	-	1,5	40	1,1	130
7	37	6	3	-	-	0,6	1,0	60	2,1	160
	38	4	5	-	-	0,5	1,2	75	2,5	150
	39	8	4	-	-	0,4	1,3	45	2,4	140
	40	7	6	-	-	0,2	0,8	30	2,8	130
	41	5	3	-	-	0,3	0,9	50	2,6	160
	42	9	8	-	-	0,7	1,1	65	2,3	150
8	43	8	-	6	-	0,8	1,4	45	2,2	160
	44	15	-	12	-	0,6	1,2	75	2,4	150
	45	20	-	14	-	1,0	1,4	30	2,6	140
	46	18	-	10	-	1,2	1,5	60	1,6	130
	47	12	-	11	-	1,1	1,3	40	1,8	160
	48	16	-	13	-	0,7	1,6	50	3,2	150

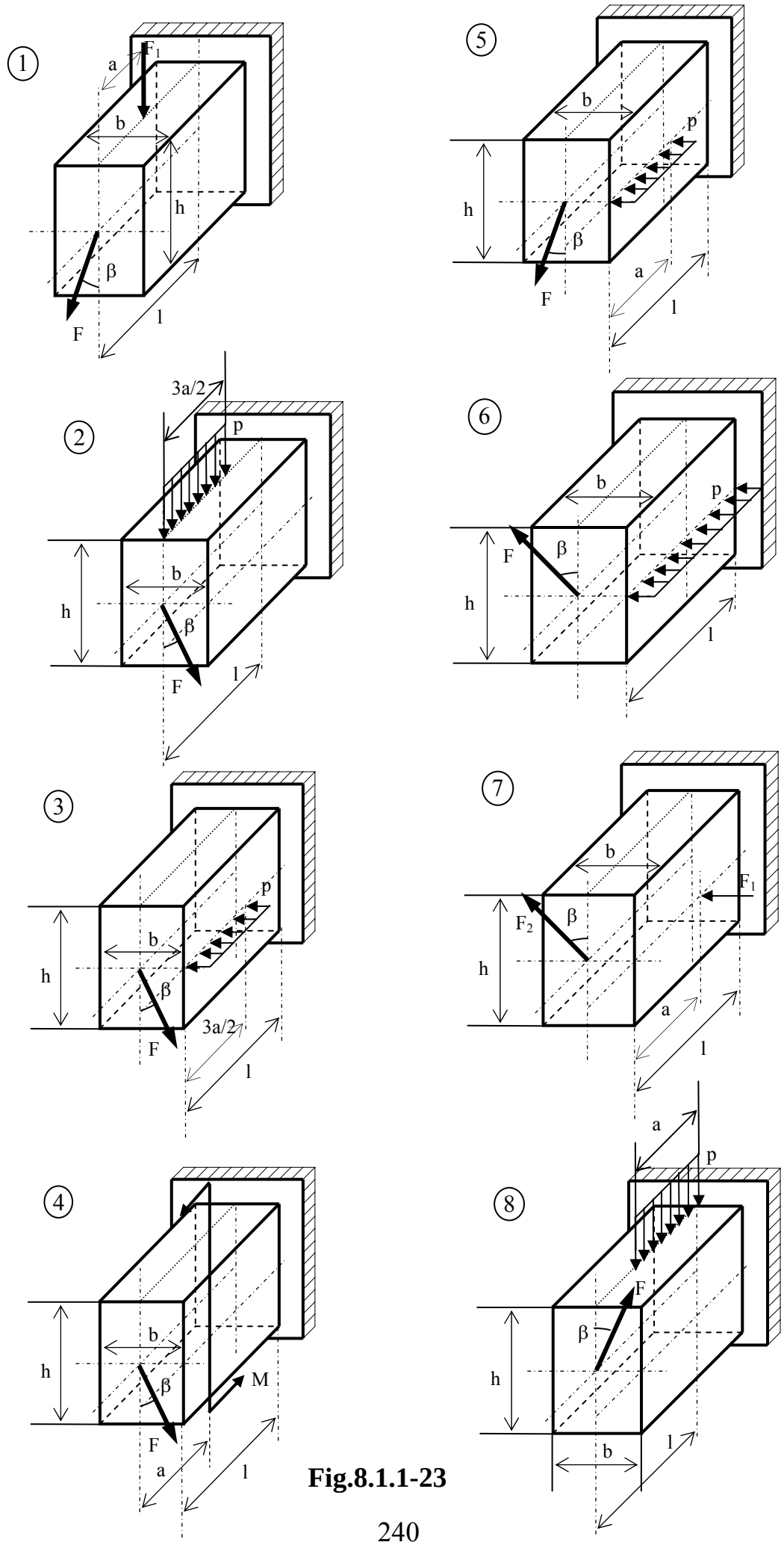

1
a
F1
b
h
β
F
l
2
3a/2
p
b
h
β
F
l
3
p
b
h
β
3a/2
F
l
4
b
h
β
M
F
a
l
5
b
p
h
β
a
F
l
6
b
p
F
β
h
l
7
b
F1
F2
β
h
a
l
8
a
p
F
β
h
b
l

Fig.8.1.1-23

8.1.1-24

Pentru barele din oțel indicate în Fig.8.1.1-24 şi conform variantelor indicate în Tabelul 8.1.1-2, se cere:

a) să se traseze diagramele de variație ale eforturilor: forța axială N, momentele încovoietoare M_{iy} şi M_{iz};
b) să se verifice secțiunile barelor cunoscând dimensiunile acestora, (indicate în Tabelul 8.1.1-2) şi rezistența admisibilă a materialului: σ_a= 160 MPa;
c) să se traseze diagrama de variație a tensiunii normale σ.

Tabelul 8.1.1-2

Schema	Varianta	F [kN]	b	h	d	δ
			[mm]			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	90	70	140	50	-
	2	95	80	145	55	-
	3	100	90	150	60	-
	4	105	100	160	65	-
	5	85	75	135	45	-
	6	80	65	130	40	-
2	7	82	80	135	-	10
	8	84	90	140	-	11
	9	85	100	145	-	12
	10	86	110	150	-	10
	11	87	115	160	-	11
	12	88	120	170	-	12
3	13	89	70	130	41	-
	14	90	80	150	42	-
	15	91	90	145	43	-
	16	92	100	160	44	-
	17	93	105	165	45	-
	18	94	110	170	46	-
4	19	83	40	60	-	16
	20	84	45	70	-	18
	21	85	50	80	-	20
	22	86	55	90	-	22
	23	87	60	100	-	24
	24	88	65	110	-	26
5	25	60	65	125	45	-
	26	61	75	135	50	-
	27	62	85	145	55	-
	28	63	95	155	60	-
	29	64	100	160	65	-
	30	65	105	165	70	-
6	31	50	75	160	-	12
	32	52	80	165	-	14
	33	54	85	170	-	16
	34	56	95	180	-	18
	35	58	105	185	-	20
	36	60	110	190	-	22
7	37	66	85	160	48	-
	38	68	95	170	50	-
	39	70	100	175	52	-
	40	72	105	180	54	-
	41	74	110	185	56	-
	42	76	115	190	58	-
8	43	53	50	80	-	29
	44	55	55	90	-	31
	45	57	60	100	-	33
	46	59	65	120	-	27
	47	61	70	130	-	30
	48	63	75	140	-	35

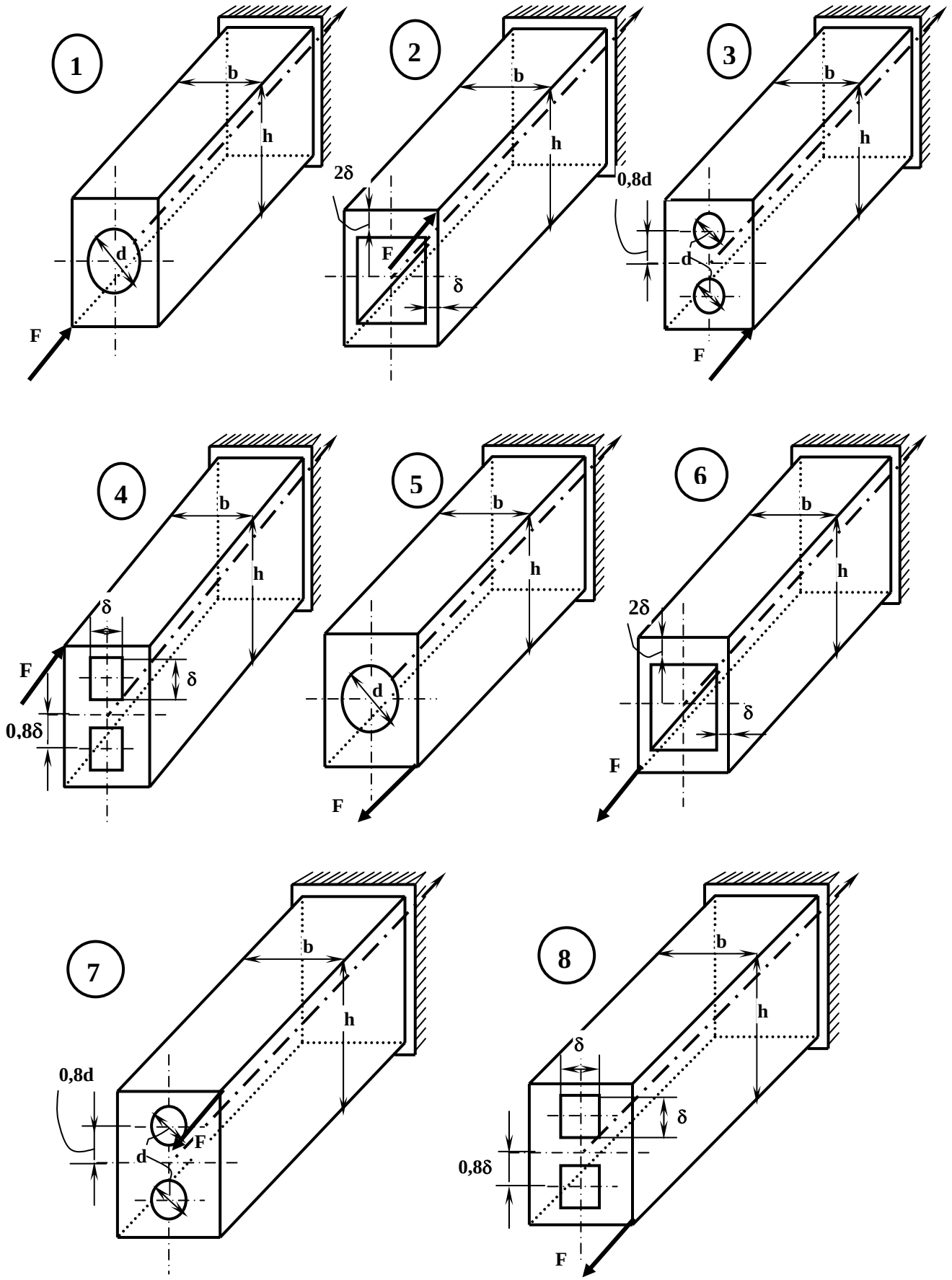

1
b
h
d
F
2
b
h
2δ
F
δ
3
b
h
0,8d
d
F
4
b
h
δ
F
δ
0,8δ
5
b
h
d
F
6
b
h
2δ
δ
F
7
b
h
0,8d
F
d
8
b
h
δ
δ
0,8δ
F

Fig.8.1.1-24

8.1.2 Solicitarea compusă de categoria a II-a

8.1.2-1

Pentru arborele de secțiune circulară din Fig.8.1.2-1 se cere:

a) diagramele de eforturi M_i şi M_t

b) dimensionarea secțiunii arborelui pentru $\sigma_{a\,(3)} = 140$ MPa.

Se cunosc: $S_1 = 8$ kN, $S_2 = 3$ kN, $D_1 = 500$ mm, $D_2 = 400$ mm.

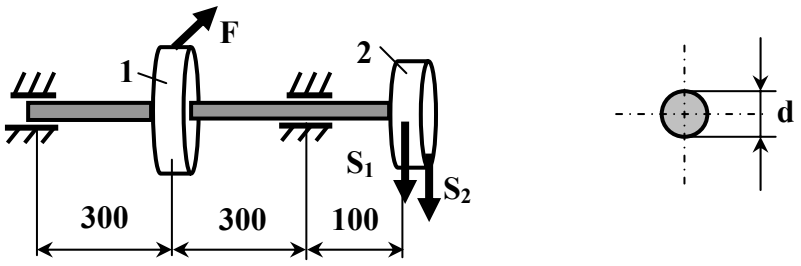


Fig.8.1.2-1

8.1.2-2

Pentru arborele de secțiune circulară din Fig.8.1.2-2 se cere:

a) diagramele de eforturi M_i şi M_t

b) diametrul arborelui pentru $\sigma_{a\,(3)} = 120$ MPa.

Se cunosc: $a = 320$ mm, $D_1 = 600$ mm, $D_2 = 400$ mm, $P = 40$ kW, $\omega = 20$ rad/s.

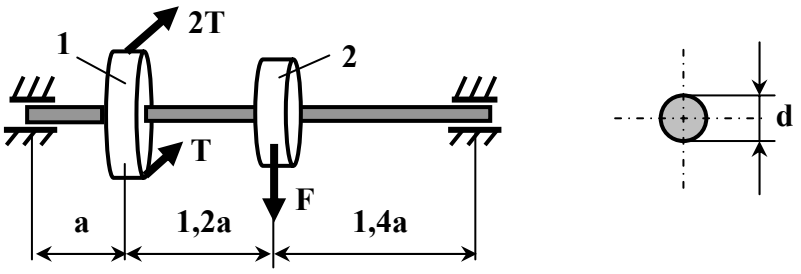


Fig.8.1.2-2

8.1.2-3

Să se dimensioneze bara de secțiune circulară din Fig.8.1.2-3 dacă $\sigma_{a,(3)}$ = 90 MPa.

Se cunosc: Q = 5 kN, D = 1 m, a = 750 mm.

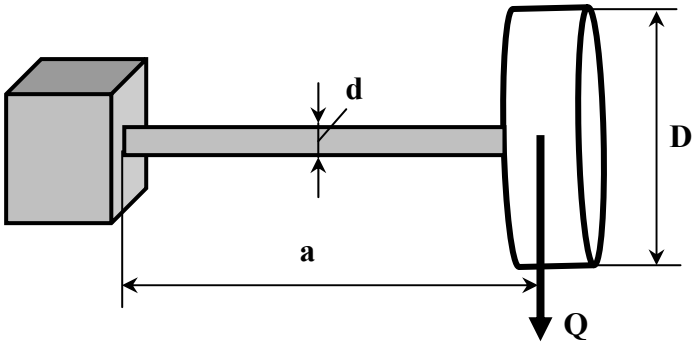


Fig.8.1.2-3

8.1.2-4

Utilizând la nevoie teoria tensiunilor tangențiale maxime, pentru bara circulară din Fig.8.1.2-4 se cere:

a) diagramele de eforturi M_i şi M_t

b) diametrul barei pentru σ_a = 140 MPa.

Se cunosc: F_2 = 10 kN, D_1 = 440 mm, D_2 = 400 mm.

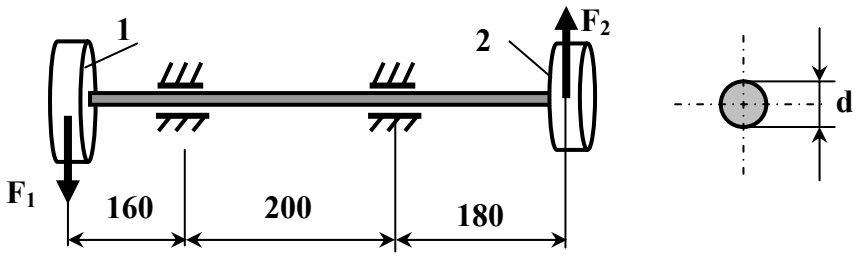


Fig.8.1.2-4

8.1.2-5

Utilizând la nevoie teoria tensiunilor tangențiale maxime, pentru bara circulară din Fig.8.1.2-5 se cere:

a) diagramele de eforturi M_i şi M_t

b) diametrul barei pentru σ_a = 110 MPa.

Se cunosc: F_2 = 12 kN, D_1 = 280 mm, D_2 = 240 mm.

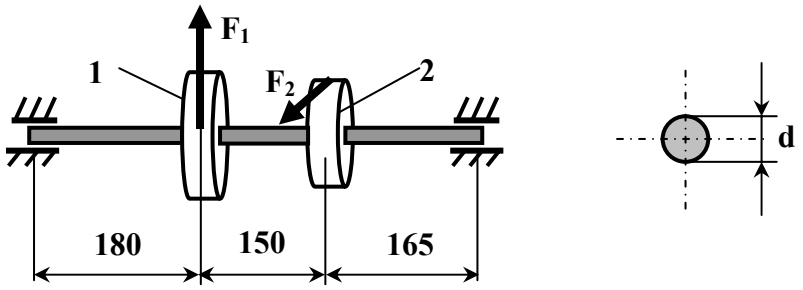


Fig.8.1.2-5

8.1.2-6

Utilizând la nevoie teoria tensiunilor tangențiale maxime, pentru bara circulară din Fig.8.1.2-6 se cere:

a) diagramele de eforturi M_i şi M_t

b) diametrul barei pentru σ_a = 120 MPa.

Se cunosc: F_1 = 8 kN, D_1 = 360 mm, D_2 = 400 mm.

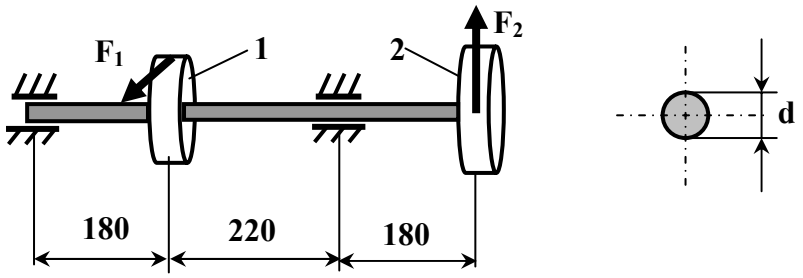


Fig.8.1.2-6

8.1.2-7

Pentru arborele din Fig.8.1.2-7 care transmite o putere P = 140 CP sub o turație n = 800 rot/min, se cere:

a) diagramele de eforturi M_i şi M_t
b) verificarea arborelui după teoria tensiunilor tangențiale maxime.

Se cunosc: D_1 = 400 mm, D_2 = 600 mm, a = 0,3 m, d = 110 mm, G_1 = 300 daN, G_2 = 400 daN.

G_1 şi G_2 sunt greutățile celor două roți de transmisie.

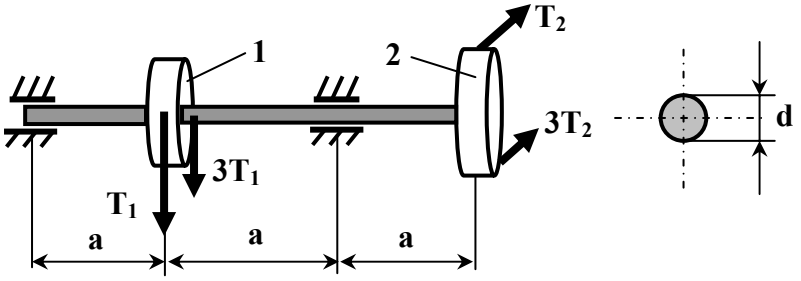


Fig.8.1.2-7

8.1.2-8

Pe arborele de secțiune circulară din Fig.8.1.2-8 sunt montate două roți de transmisie de greutate G_1 = 500 daN, respectiv G_2 = 700 daN. Arborele transmite o putere P = 200 CP sub o turație n = 1.000 rot/min. Se cere:

a) diagramele de eforturi M_i şi M_t
b) diametrul arborelui pentru σ_a = 52 MPa (Se va utiliza toria a V-a de rezistență).

Se cunosc: D_1 = 400 mm, D_2 = 700 mm.

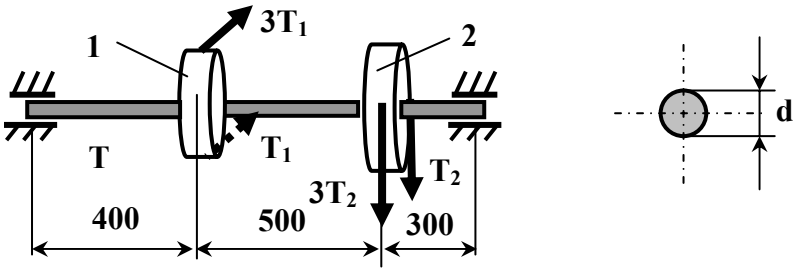


Fig.8.1.2-8

8.1.2-9

Pentru arborele de secțiune circulară din Fig.8.1.2-9 se cere:

a) diagramele de eforturi M_i şi M_t

b) diametrul arborelui pentru σ_a = 100 MPa (Se va utiliza teoria a V-a de rezistență).

Se cunosc: T_1 = 5 kN, T_2 = 10 kN, D_1 = 300 mm, D_2 = 150 mm.

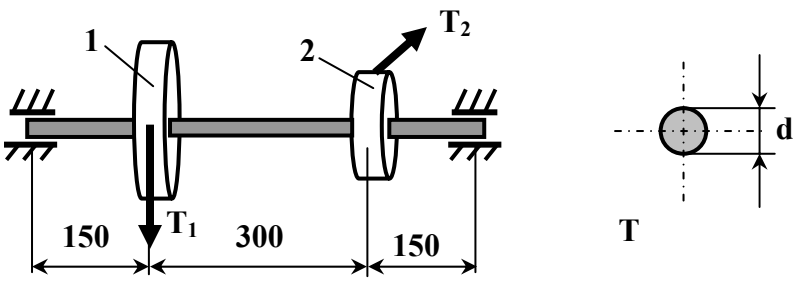


Fig.8.1.2-9

8.1.2-10

Un arbore de secțiunea circulară de diametru d = 80 mm, transmite o putere P = 800 CP sub o turație n = 2.000 rot/min. Efortul axial din arbore este N = 200 kN.

Utilizând teoria a III-a şi a IV-a de rezistență, să se determine tensiunea echivalentă maximă.

8.1.2-11

Se consideră arborele de oțel de secțiune inelară din Fig.8.1.2-11 şi se cere:

a) valoarea forței Q dacă $\alpha = 30^0$

b) diagramele momentelor încovoietoare şi de torsiune

c) determinarea tensiunii echivalente maxime pe baza teoriei tensiunii tangențiale maxime (teoria a III-a).

Se cunosc: F = 5 kN, D = 200 mm, a = 0,3 m.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Constanța, 2006, profil mecanic)

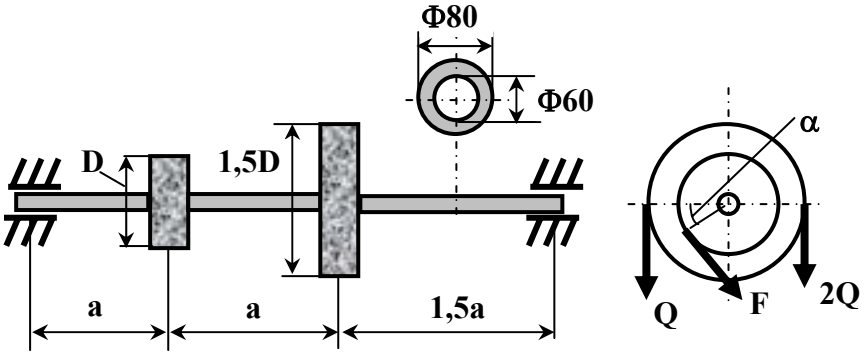


Fig.8.1.2-11

8.1.2-12

Pentru arborele de secțiune circulară din Fig.8.1.2-12 se dau: D_1 = 400 mm, D_2 = 600 mm, $\sigma_{a\,(3)}$ = 100 MPa, F_2 = 11,3137 kN.

Se cere:

a) valoarea forței F_1

b) dimensionarea arborelui.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Timişoara, 2004, profil mecanic)

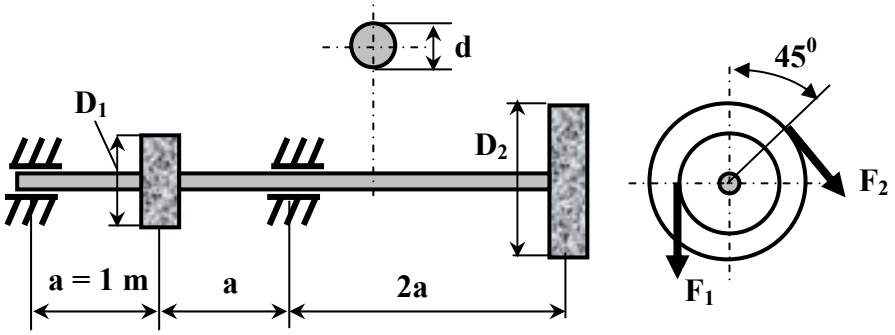


Fig.8.1.2-12

8.1.2 -13

Pentru arborii indicați în Fig.8.1.2-13 şi conform variantelor indicate în Tabelul 8.1.2-1, se cere:

a) să se traseze diagramele momentelor de torsiune M_t;

b) să se traseze diagramele momentelor încovoietoare în plan vertical şi orizontal;

c) să se dimensioneze arborii aplicând teoria a III-a de rezistență, dacă σ_a =120 MPa.

Tabelul 8.1.2-1

Schema	Varianta	a	D_1	D_2	P	ω
		[mm]			[kW]	[rad/s]
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	260	400	600	13	9
	2	210	400	500	14	10
	3	220	300	400	15	11
	4	250	300	500	16	12
	5	230	500	600	17	13
	6	240	600	800	18	14
2	7	150	400	500	26	20
	8	170	300	400	28	16
	9	190	500	600	32	12
	10	160	400	600	24	17
	11	180	300	500	38	13
	12	200	500	700	22	10
3	13	200	280	560	7	11
	14	200	360	720	6	10
	15	150	400	640	8	9
	16	150	300	680	9	8
	17	250	320	500	11	7
	18	250	380	600	5	6
4	19	180	310	480	22	12
	20	200	320	580	26	14
	21	220	330	560	25	9
	22	240	350	540	18	18
	23	250	360	520	33	20
	24	260	370	500	11	15
5	25	150	400	620	42	11
	26	160	500	720	38	12
	27	170	400	640	34	13
	28	180	500	740	41	14
	29	190	400	580	47	15
	30	150	500	680	35	16
6	31	200	250	400	19	17
	32	180	450	600	21	18
	33	190	350	500	23	16
	34	170	250	400	25	15
	35	150	450	600	27	14
	36	160	350	500	29	13
7	37	260	280	560	13	11
	38	210	360	720	14	12
	39	220	400	640	15	13
	40	250	300	680	16	14
	41	230	320	500	17	20
	42	240	380	600	18	16
8	43	150	310	480	32	14
	44	170	320	580	24	9
	45	190	330	560	38	18
	46	160	350	540	22	20
	47	180	360	520	7	15
	48	200	370	500	6	11

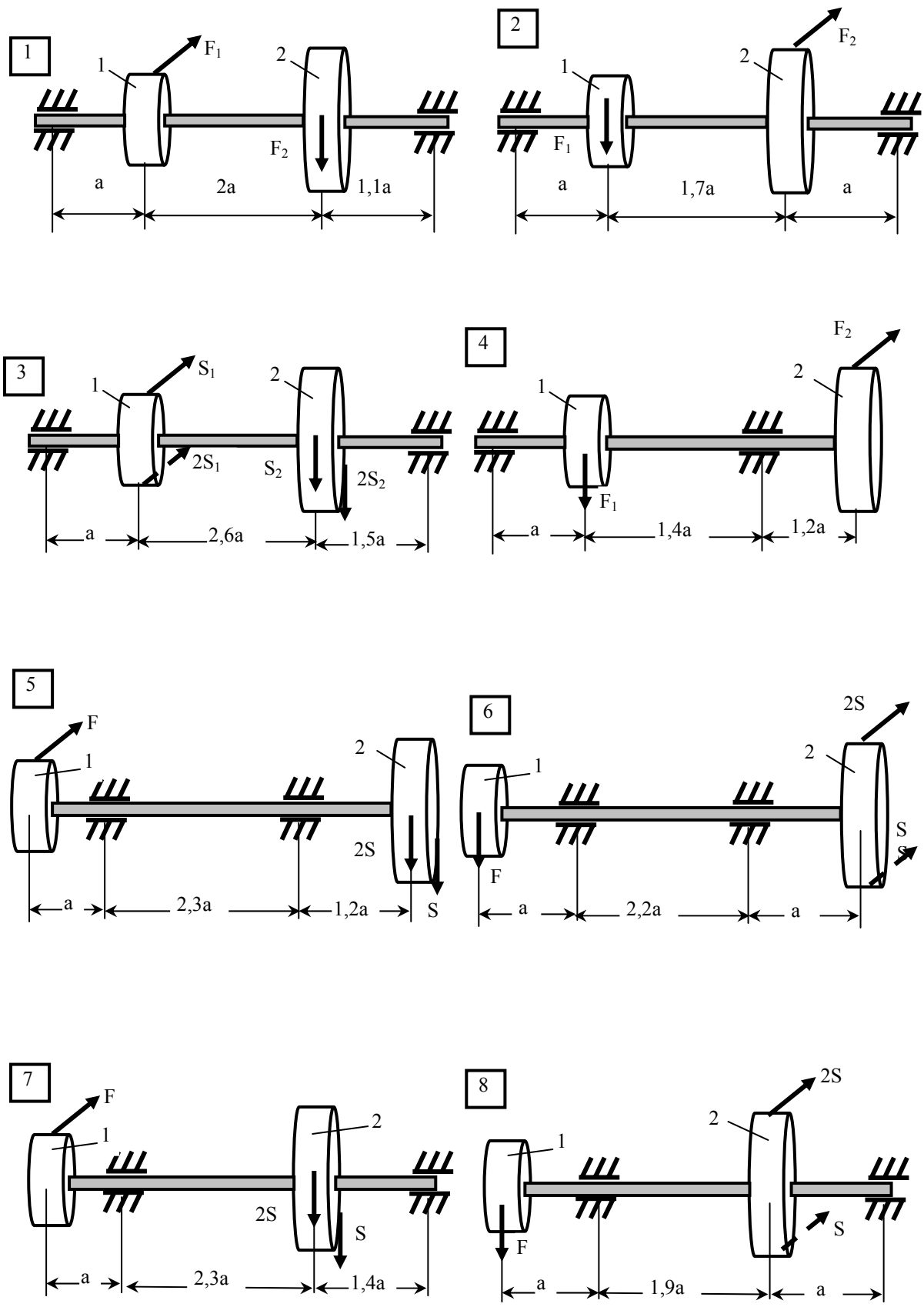

1
F1
1
2
F2
a
2a
1,1a
2
F2
1
2
F1
a
1,7a
a
3
S1
1
2
2S1
S2
2S2
a
2,6a
1,5a
4
F2
2
1
F1
a
1,4a
1,2a
5
F
1
2
2S
a
2,3a
1,2a
S
6
2S
2
1
S
S
F
a
2,2a
a
7
F
1
2
2S
S
a
2,3a
1,4a
8
2S
2
1
S
F
a
1,9a
a

Fig.8.1.2-13

8.1.2-14

Pentru bara de oțel de secțiune inelară cu raportul d/D = 0,5 din Fig.8.1.2-14, se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i şi M_t

b) dimensiunile secțiunii transversale, după teoria a V-a de rezistență şi σ_a = 80 MPa.

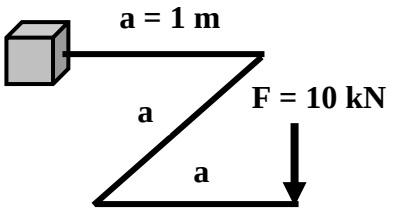


Fig.8.1.2-14

8.1.2-15

Pentru bara cotită de secțiune circulară din Fig.8.1.2-15 se cere:

a) diagramele de eforturi M_i şi M_t

b) dimensionarea barei după teoria a V-a de rezistență şi σ_a = 150 MPa.

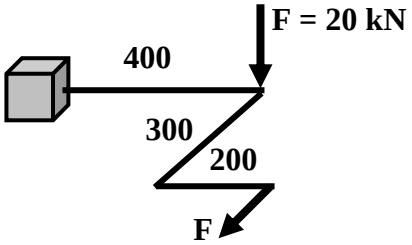


Fig.8.1.2-15

8.1.2-16

Pentru bara cotită de secțiune circulară cu d = 80 mm din Fig.8.1.2-16 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i şi M_t

b) sarcina capabilă F pentru σ_a = 120 MPa şi teoria a III-a de rezistență.

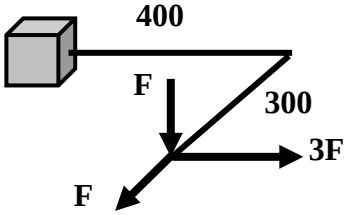


Fig.8.1.2-16

8.1.2-17

Pentru bara cotită de secțiune circulară cu d = 40 mm din Fig.8.1.2-17 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i şi M_t
b) tensiunea echivalentă maximă după teoria a III-a de rezistență.

Se cunosc: F_1 = 0,6 kN, F_2 = 0,8 kN, a_1 = 150 mm, a_2 = 250 mm.

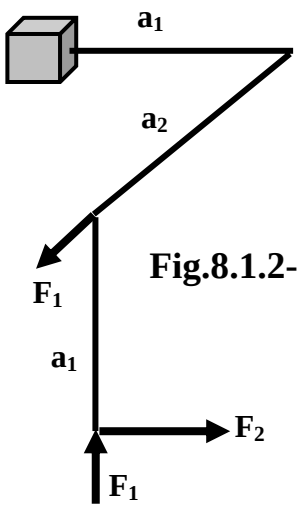


Fig.8.1.2-17

8.1.2-18

Pentru bara cotită de secțiune circulară cu d = 60 mm din Fig.8.1.2-18 se cere:

c) diagramele de eforturi N, M_i şi M_t
d) forța capabilă după teoria a III-a de rezistență şi σ_a = 100 MPa.

Se dă: a = 200 mm.

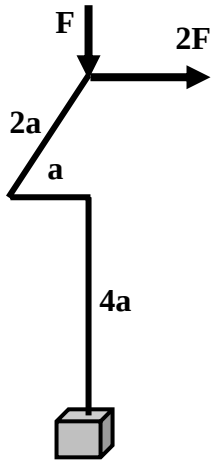


Fig.8.1.2-18

8.1.2-19

Pentru bara de secțiune circulară din Fig.8.1.2-19 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i şi M_t
b) diametrul barei după teoria a III-a de rezistență şi σ_a = 120 MPa.

Se cunosc: F_1 = 1,4 kN, F_2 = 0,6 kN, a = 200 mm.

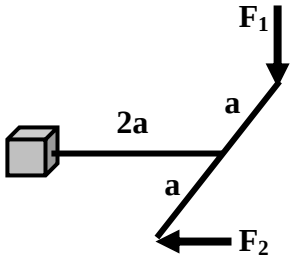


Fig.8.1.2-19

8.1.2-20

Pentru bara circulară cu diametrul d = 80 mm din Fig.8.1.2-20 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) tensiunea echivalentă maximă după teoria a III-a de rezistență.

Se cunosc: F_1 = 0,6 kN, F_2 = 0,8 kN, a_1 = 150 mm, a_2 = 250 mm.

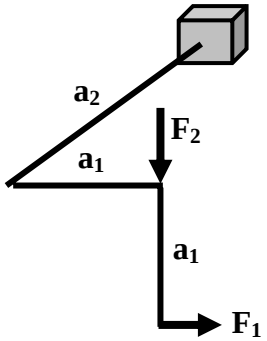


Fig.8.1.2-20

8.1.2-21

Pentru bara circulară cu diametrul din Fig.8.1.2-21 se cere:

c) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
d) diametrul barei după teoria a V-a de rezistență şi σ_a = 150 MPa.

Se cunosc: F_1 = 25 kN, F_2 = 40 kN, F_3 = 80 kN a_1 = 300 mm, a_2 = 500 mm, a_3 = 800 mm.

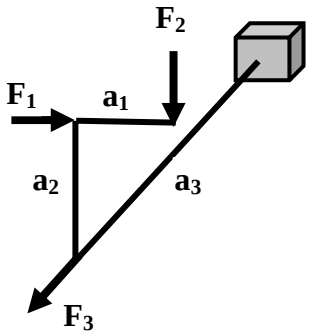


Fig.8.1.2-21

8.1.2-22

O bară cotită de secțiune circulară cu diametrul d = 40 mm este solicitată ca în Fig.8.1.2-22. Se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) tensiunea echivalentă maximă după teoria a III-a de rezistență.

Se cunoaşte F = 1,5 kN.

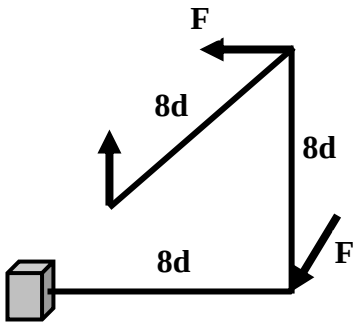


Fig.8.1.2-22

8.1.2-23

Pentru bara cotită de secțiune circulară din Fig.8.1.2-23 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) tensiunea echivalentă maximă după teoria a III-a de rezistență.

Se cunosc: F_1 = 0,6 kN, F_2 = 0,8 kN, d = 40 mm, a_1 = 150 mm, a_2 = 250 mm.

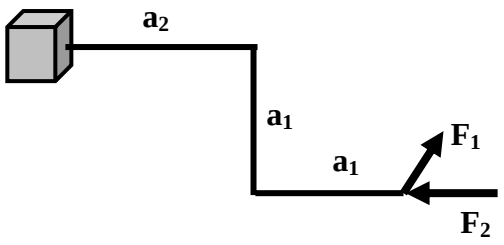


Fig.8.1.2-23

8.1.2-24

Pentru bara circulară cu diametrul d din Fig.8.1.2-24 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) diametrul secțiunii utilizând teoria a III-a de rezistență şi σ_a = 100 MPa.

Se cunosc: F = 20 kN, a = 400 mm.

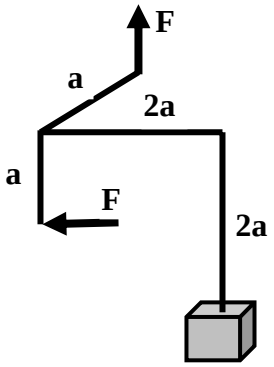


Fig.8.1.2-24

8.1.2-25

Pentru bara circulară cu diametrul d din Fig.8.1.2-25 se cere:

c) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
d) diametrul secțiunii utilizând teoria a III-a de rezistență şi σ_a = 120 MPa.

Se cunosc: F_1 = 1 kN, F_2 = 0,5 kN, a = 200 mm.

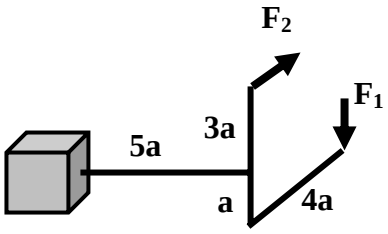


Fig.8.1.2-25

8.1.2-26

Pentru bara inelară cu D/d =1,2 din Fig.8.1.2-26 se cere:

e) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
f) diametrele secțiunii barei utilizând teoria a III-a de rezistență şi σ_a = 90 MPa.

Se cunosc: F = 20 kN, a = 400 mm.

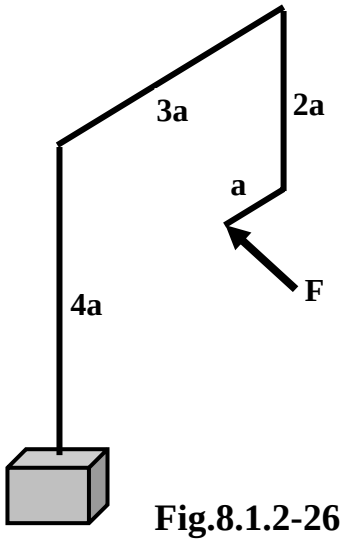


Fig.8.1.2-26

8.1.2-27

Se dă cadrul din Fig.8.1.2-27 şi se cere:

a) să se traseze diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) să se determine valoarea forței F, dacă barele au secțiunea circulară cu diametrul d = 80 mm, a = 1 m, $\sigma_{a(3)}$ = 100 MPa.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Univ. "Politehnica" Bucureşti, 1987, profil nemecanic)

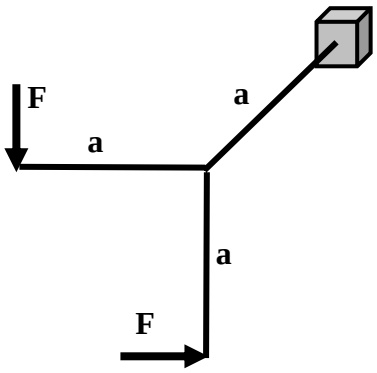


Fig.8.1.2-27

8.1.2-28

La bara cotită din Fig.8.1.2-28 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) să se verifice bara în ipoteza a III-a de rezistență.

Se dau: F = 2 kN, a = 1 m, d = 80 mm, σ_a = 220 MPa.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Univ. "Politehnica" Bucureşti, 1988, profil nemecanic)

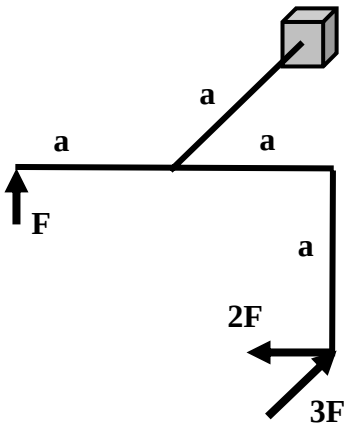


Fig.8.1.2-28

8.1.2-29

Bara cotită de secțiune inelară din Fig.8.1.2-29 este încărcată cu forța F. Se cere:

a) să se traseze diagramele de eforturi M_i, M_t
b) să se determine forța capabilă dacă a = 750 mm, $\sigma_{a(3)}$ = 150 MPa, d = 100 mm, D = 120 mm.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Piteşti, 1984)

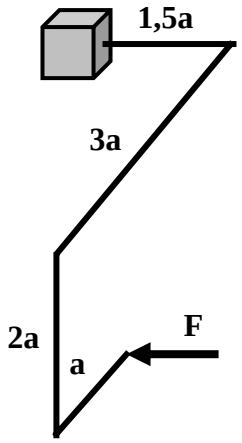


Fig.8.1.2-29

8.1.2-30

O bară de oțel cu secțiunea circulară de diametru d, este solicitată cu forțele F (în planul barei) şi cu 2F (perpendiculară pe planul barei) ca în Fig.8.1.2-30. Se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) să se verifice bara în ipoteza a III-a de rezistență (se neglijează efectul forțelor axiale şi tăietoare).

Se dau: F = 1 kN, a = 0,5 m, d = 60 mm, σ_a = 100 MPa.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Piteşti, 1984, profil nemecanic)

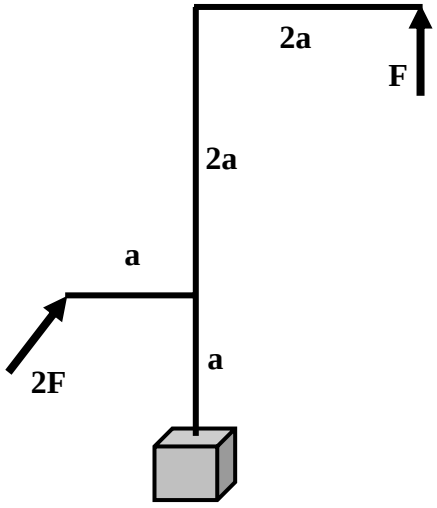


Fig.8.1.2-30

8.1.2-31

Pentru bara cotită de secțiune circulară din Fig.8.1.2-31 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) tensiunea maximă calculată după teoria a III-a de rezistență.

Se cunosc: F = 2 kN, a = 0,3 m, d = 180 mm.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza locală, Timişoara, 1996)

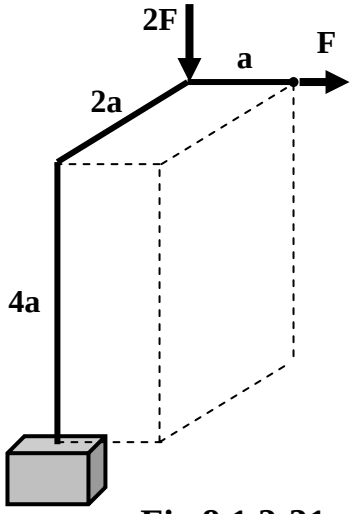


Fig.8.1.2-31

8.1.2-32

Se dă bara dreaptă de secțiune circulară din Fig.8.1.2-32. Cunoscând că F = 2 kN, se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) să se dimensioneze bara ştiind că σ_a = 100 MPa (se va utiliza teoria a III-a de rezistență).

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Timişoara, 1996, profil nemecanic)

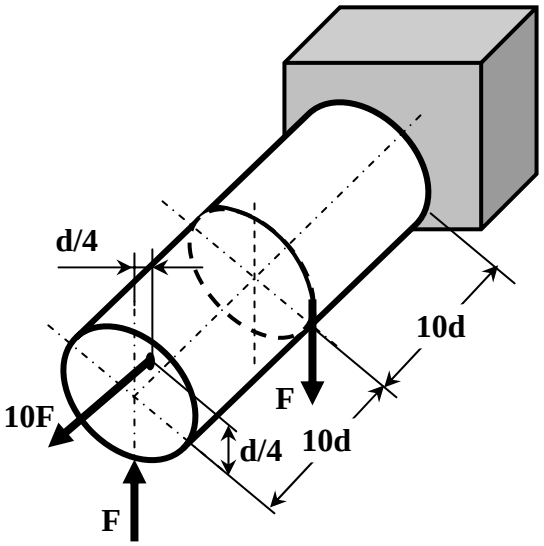


Fig.8.1.2-32

8.1.2-33

Pentru bara cotită de secțiune constantă, cu diametrul d şi încărcarea din Fig.8.1.2-33 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) sarcina capabilă F după a treia teorie de rezistență.

Se cunosc: a = 0,5 m, d = 60 mm, σ_a = 120 MPa.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Bucureşti, 1997, profil nemecanic)

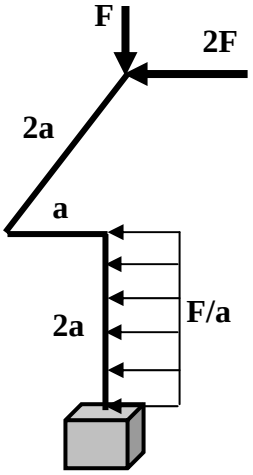


Fig.8.1.2-33

8.1.2-34

Pentru bara de secțiune circulară din Fig.8.1.2-34 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) diametrul barei, utilizând teoria a III-a de rezistență.

Se dau: F = 15 kN, σ_a = 150 MPa.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Bucureşti, 1997, profil colegiu)

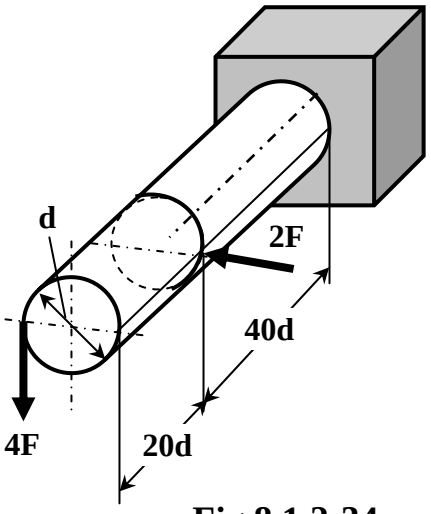


Fig.8.1.2-34

8.1.2-35

Pentru bara de secțiune variabilă în trepte, încărcată ca în Fig.8.1.2-35, se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) să se calculeze forța capabilă F cu ipoteza a III-a de rezistență

c) care este valoarea forței F dacă se neglijează efectul forței axiale N?

Se cunosc: d = 60 mm, σ_a = 100 MPa.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Timişoara, 1999, profil nemecanic)

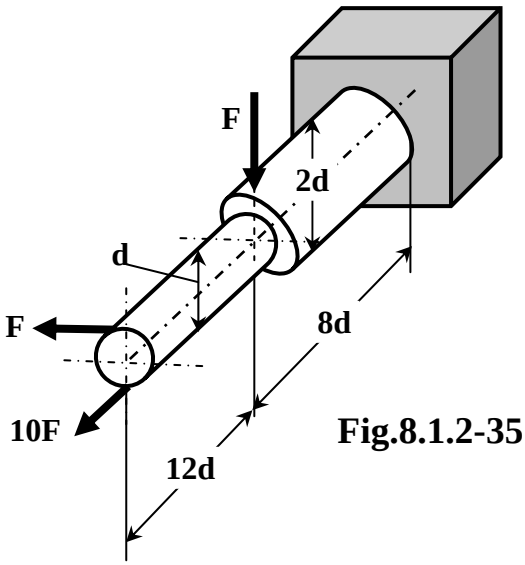


Fig.8.1.2-35

8.1.2-36

Pentru cadrul de secțiune circulară constantă din Fig.8.1.2-36, se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t

b) sarcina capabilă (p = ?) pentru d = 60 mm şi σ_a = 100 MPa, a = 1 m.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Timişoara, 1999, profil mecanic)

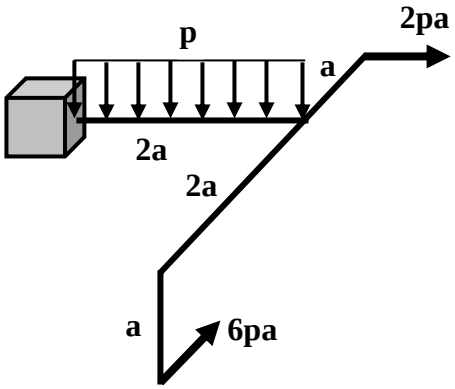


Fig.8.1.2-36

8.1.2-37

Pentru cadrul de secțiune circulară constantă din Fig.8.1.2-37, se cere:

c) diagramele de eforturi N, M_i, M_t

d) diametrul d după teoria a III-a de rezistență.

Se cunosc: F = 4 kN, σ_a = 100 MPa, a = 0,2 m.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Timişoara, 1999, profil mecanic)

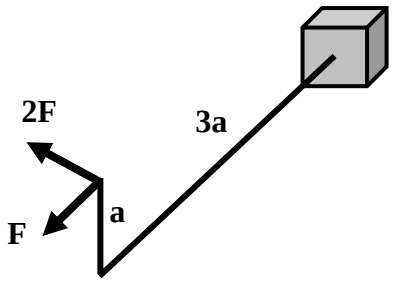


Fig.8.1.2-37

8.1.2-38

Pentru bara din Fig.8.1.2-38, având secțiunea circulară cu d = 40 mm, se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t

b) forța capabilă (F = ?) utilizând teoria tensiunii tangențiale maxime, ținând cont şi de efortul axial N.

Se cunosc: a = 400 mm, σ_a = 150 MPa.

(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Cluj Napoca, 2001, profil nemecanic)

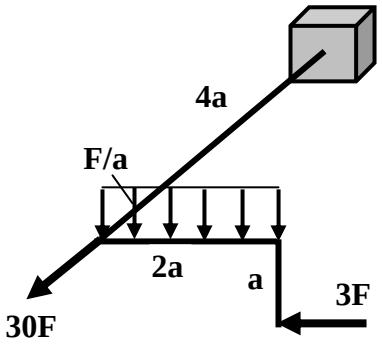


Fig.8.1.2-38

8.1.2-39

Pentru bara cotită de secțiune circulară cu diametrul d = 100 mm, din Fig.8.1.2-39 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) tensiunea maximă după teoria a III-a de rezistență (se neglijează N).

Se cunosc: F = 10 kN, a = 200 mm.

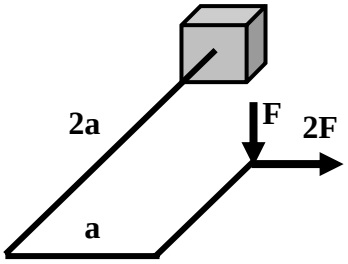


Fig.8.1.2-39

8.1.2-40

Pentru bara cotită circulară din Fig.8.1.2-40 se cere:

a) diagramele de eforturi N, M_i, M_t
b) diametrul barei (d = ?) pentru σ_a = 150 MPa şi teoria a III-a de rezistență.

Se cunosc: F = 2 kN, a = 10d.
Obs.: unghiurile dintre bare sunt drepte.
(Concursul Studențesc "C. C. Teodorescu" – faza națională, Bucureşti, 2002, profil mecanic)

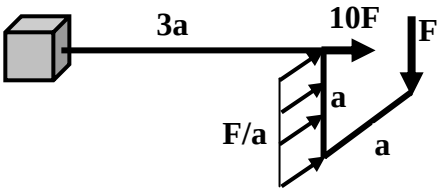


Fig.8.1.2-40

8.2 CALCULUL DEFORMAȚIILOR PRIN METODE ENERGETICE

8.2.1 Sisteme static determinate

8.2.1-1

Pentru grinda încastrată din Fig.8.2.1-1, de rigiditate EI = constantă, se cere:

a) deplasarea pe verticală în secțiunea (1), (δ_1 = ?)

b) rotirea secțiunii (1), (φ_1 = ?)

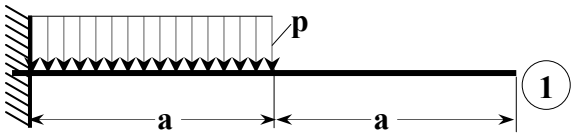


Fig.8.2.1-1

8.2.1-2

Pentru grinda încastrată din Fig.8.2.1-2, de rigiditate EI = constant, se cere deplasarea pe verticală în secțiunea (1), δ_1 = ?, şi rotirea secțiunii (2), φ_2 = ?. Se dă: $M_0 = F \cdot a$.

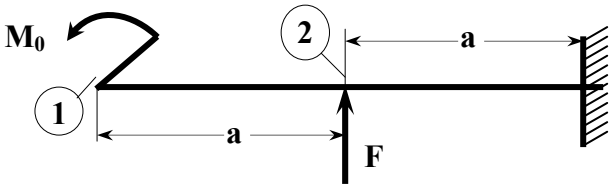


Fig.8.2.1-2

8.2.1-3

Pentru grinda simplu rezemată din Fig.8.2.1-3, de rigiditate EI = constant, se cere deplasarea pe verticală în secțiunea (3), (δ_3 = ?) şi rotirea secțiunii (1), (φ_1 = ?). Se dă: $M_0 = 2F \cdot a$.

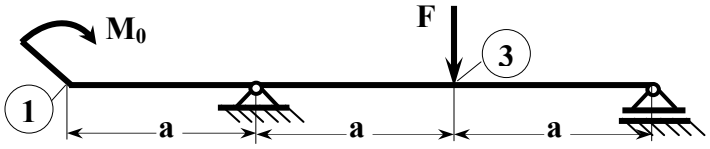


Fig.8.2.1-3

8.2.1-4

Pentru grinda simplu rezemată din Fig.8.2.1-4, de rigiditate EI = constant, se cere deplasarea pe verticală în secțiunea (1), (δ_1 = ?) şi rotirea secțiunii (A), (φ_A = ?).

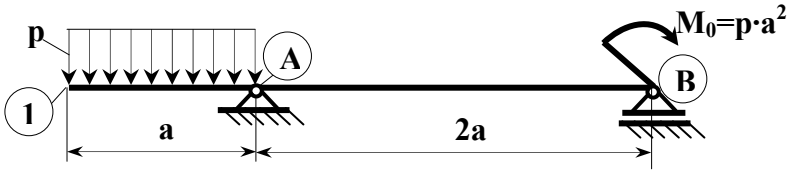
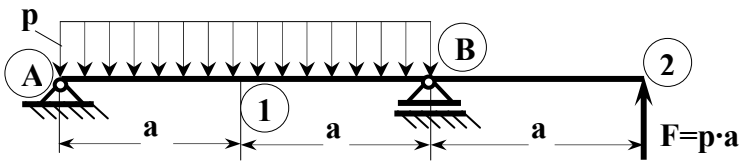


Fig.8.2.1-4

8.2.1-5

Pentru grinda simplu rezemată din Fig.8.2.1-5, de rigiditate EI = constant, se cere deplasările pe verticală în secțiunile (1) şi (2), (δ_1 = ? şi δ_2 = ?) şi rotirea secțiunii (A), (φ_A = ?).



8.2.1-5

8.2.1-6

Pentru grinda simplu rezemată din Fig.8.2.1-6, de rigiditate EI = constant, se cere deplasarea pe verticală în secțiunea (1), (δ_1 = ?) şi rotirile secțiunilor (A) şi (B), (φ_A = ? şi φ_B = ?). Se dă:$M_0 = 0{,}5 \cdot p \cdot a^2$.

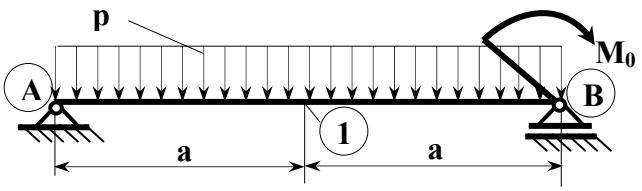


Fig.8.2.1-6

8.2.1-7

Pentru grinda simplu rezemată din Fig.8.2.1-7, de rigiditate EI = constant, se cere deplasarea pe verticală în secțiunea (1), (δ_1 = ?) şi rotirea secțiunii (A), (φ_A = ?).

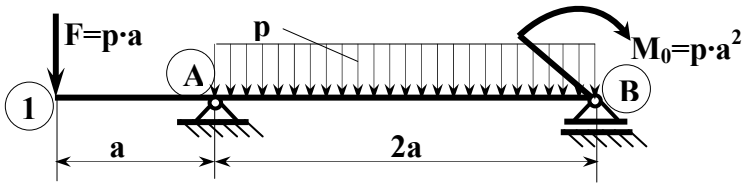


Fig.8.2.1-7

8.2.1-8

Pentru grinda simplu rezemată din Fig.8.2.1-8, de rigiditate constantă, se cere deplasarea pe verticală în secțiunea (1). Se dau: F = 0,8·p·a, M_0 = 5,2·p·a^2, a = 1 m, p = 10 kN/m, E = 2,1·10^5 MPa şi I = 3·10^7 mm^4 .

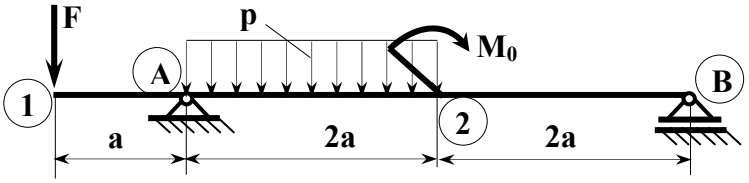


Fig.8.2.1-8

8.2.1-9

Pentru grinda simplu rezemată din Fig.8.2.1-9, de rigiditate constantă, se cere deplasarea pe verticală în secțiunea (1). Se dau: F = 1,5 kN, M_0 = 1,5 kNm, a = 1m, p = 1,5 kN/m, E = 2,1·10^5 MPa şi I = 3·10^7 mm^4.

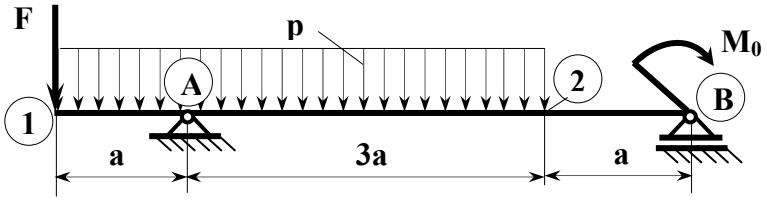


Fig.8.2.1-9

8.2.1-10

Pentru grinda simplu rezemată din Fig.8.2.1-10, cu rigiditate constantă pe intervale, EI şi 2EI, se cere deplasarea pe verticală în secțiunea (2), (δ_2 = ?) şi rotirea secțiunilor de capăt (A) şi (B), (φ_A = ? şi φ_B = ?).

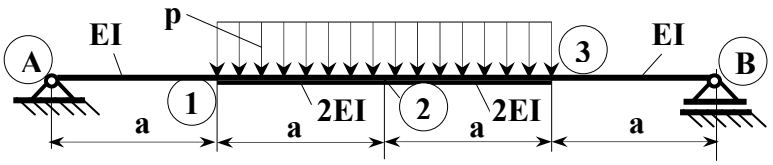


Fig.8.2.1-10

8.2.1-11

Pentru grinda simplu rezemată din Fig.8.2.1-11, cu rigiditate constantă pe intervale, EI şi 2EI, se cere deplasările pe verticală în secțiunile (1) şi (2) şi rotirea secțiunii de capăt (A). Se dă: $M_0 = p \cdot a^2$. Particularizați pentru: a = 1 m, p = 1 kN/m, E = $2{,}1 \cdot 10^5$ MPa şi I = $21{,}4 \cdot 10^6$ mm^4.

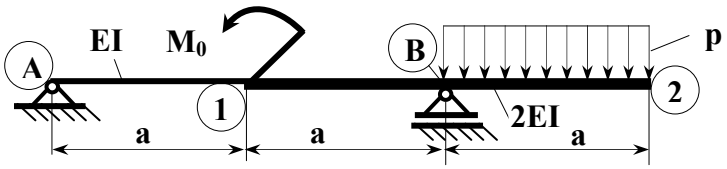


Fig.8.2.1-11

8.2.1-12

Pentru grinda articulată din Fig.8.2.1-12, cu rigiditate constantă EI, se cere deplasarea pe verticală a articulației din secțiunea (2). Se dă: $M_0 = p \cdot a^2$. Particularizați pentru: a = 1 m, p = 30 kN/m, E = $2{,}1 \cdot 10^5$ MPa şi I = $2{,}5 \cdot 10^7$ mm^4.

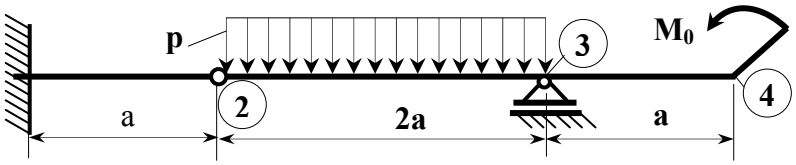


Fig.8.2.1-12

8.2.1-13

Pentru grinda articulată din Fig.8.2.1-13, cu rigiditate constantă EI, se cere deplasarea pe verticală a articulației din secțiunea (3). Se dă: $M_0 = 2 \cdot p \cdot a^2$ şi $F = 2 \cdot p \cdot a$. Particularizați pentru: a = 0,6 m, p = 20 kN/m, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa şi $I = 7{,}3 \cdot 10^6$ mm^4.

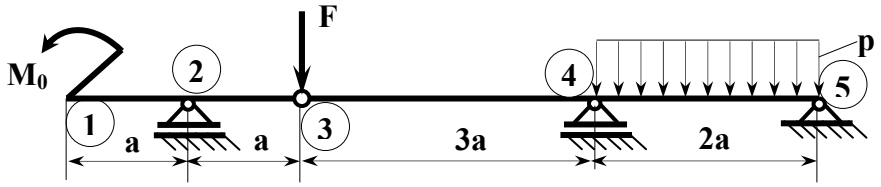


Fig.8.2.1-13

8.2.1-14

Pentru grinda articulată din Fig.8.2.1-14, cu rigiditate constantă EI, se cere deplasarea pe verticală a articulației din secțiunea (2) şi rotirea secțiunii (3). Se dă: $M_0 = 0{,}25 \cdot p \cdot a^2$.

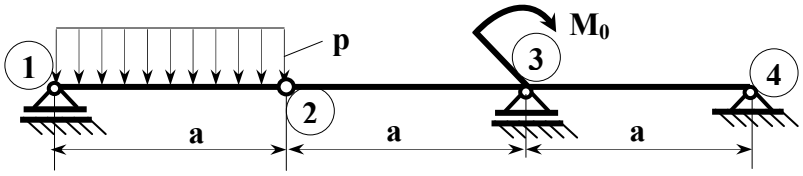


Fig.8.2.1-14

8.2.1-15

Pentru grinda articulată din Fig.8.2.1-15, cu rigiditate constantă EI, se cere deplasarea pe verticală a secțiunii (2) şi rotirea secțiunii (2). Se dă: F = 12 kN, a = 0,5 m, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa şi $I = 1{,}48 \cdot 10^6$ mm^4.

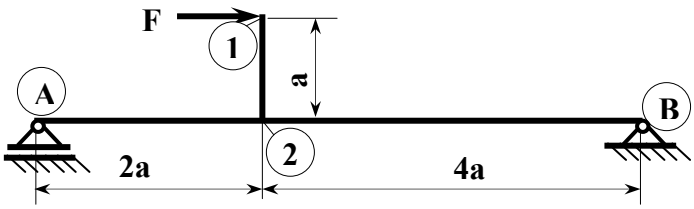


Fig.8.2.1-15

8.2.1-16

Să se calculeze deplasările capătului liber al barei cotite de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-16: deplasarea pe verticală $\delta_{v,1}$ şi deplasarea pe orizontală $\delta_{h,1}$.

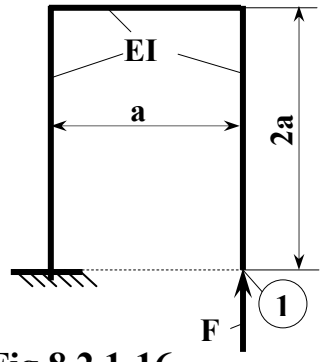


Fig.8.2.1-16

8.2.1-17

Pentru bara de rigiditate constantă, EI, din Fig.8.2.1-17 se cere să se determine deplasarea pe verticală a secțiunii (1) şi rotirea secțiunii (2). Se dau: F = p·a şi $M_0 = p \cdot a^2$.

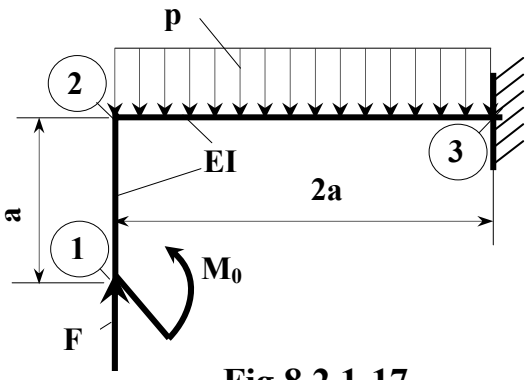


Fig.8.2.1-17

8.2.1-18

Pentru bara de rigiditate constantă pe intervale, EI şi 3 EI din Fig.8.2.1-18 să se calculeze: deplasarea pe orizontală a secțiunii (1), deplasarea pe verticală a secțiunii (2) şi rotirea din secțiunea (3). Se dă: F = 1,2·p·a.

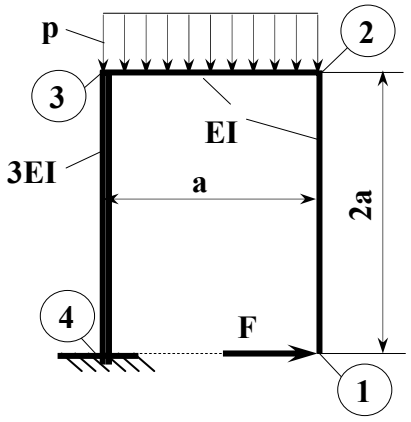


Fig.8.2.1-18

8.2.1-19

Să se calculeze deplasarea totală a capătului liber al barei cotite de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-19. ($\delta_{v,1}$ = ?, $\delta_{h,1}$ = ?, δ_1 = ?).

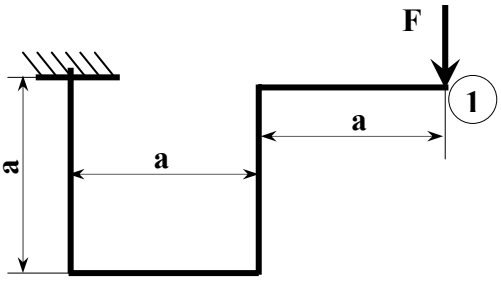


Fig.8.2.1-19

8.2.1-20

Să se calculeze deplasarea totală a capătului liber al barei cotite de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-20 ($\delta_{v,1}$ = ?, $\delta_{h,1}$ = ?, δ_1 = ?).

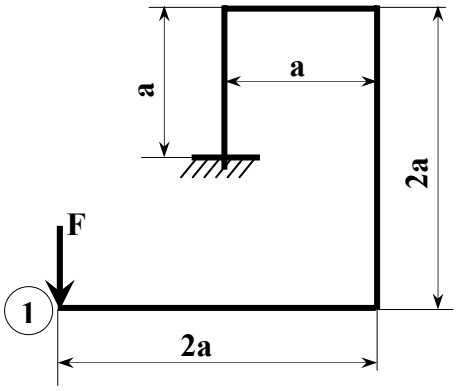


Fig.8.2.1-20

8.2.1-21

Să se calculeze deplasarea totală a capătului liber al barei cotite de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-21 ($\delta_{v,1}$ = ?, $\delta_{h,1}$ = ?, δ_1 = ?).

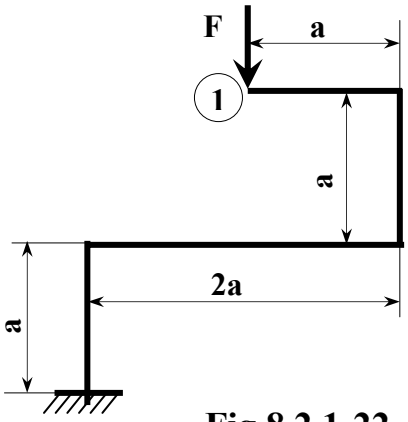


Fig.8.2.1-22

8.2.1-22

Să se calculeze deplasarea totală a capătului liber (1) al barei cotite simplu rezemată, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-22 ($\delta_{v,1}$ = ?, $\delta_{h,1}$ = ?, δ_1 = ?).

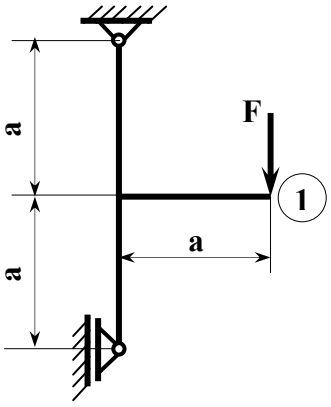


Fig.8.2.1-22

8.2.1-23

Bara cotită simplu rezemată din Fig.8.2.1-23 are rigiditate constantă EI. Să se calculeze următoarele deplasări: deplasarea pe verticală a secțiunii (3), deplasarea pe orizontală a secțiunii (4) şi rotirea reazemului mobil φ_4.

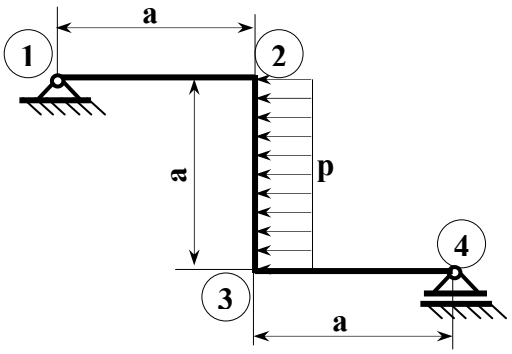


Fig.8.2.1-23

8.2.1-24

Pentru bara cotită din Fig.8.2.1-24 de rigiditate constantă EI, se cere să se calculeze următoarele deplasări: deplasarea pe verticală a secțiunii (1), deplasarea pe orizontală a secțiunii (3) şi rotirea nodului rigid (2). Se dă: $M_0 = 0{,}5\ pa^2$.

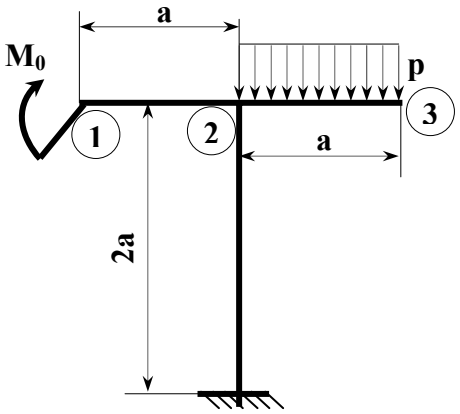


Fig.8.2.1-24

8.2.1-25

Pentru bara cotită din Fig.8.2.1-25, de rigiditate constantă pe intervale, EI şi 3 EI, se cere să se calculeze următoarele deplasări: deplasarea pe verticală a secțiunii (3), deplasarea pe orizontală a secțiunii (1), şi rotirea nodului rigid (2). Se dă: F = 1,2 pa.

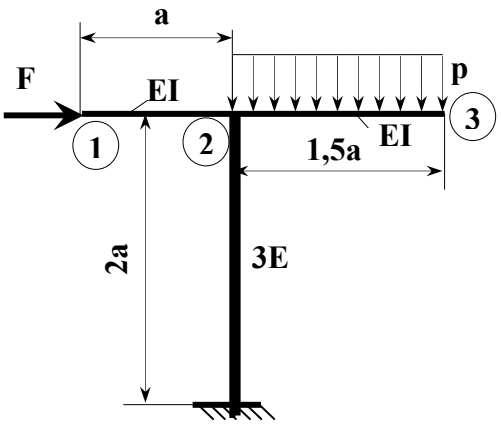


Fig.8.2.1-25

8.2.1-26

Pentru bara cotită din Fig.8.2.1-26, de rigiditate constantă EI, se cere să se calculeze următoarele deplasări: deplasarea pe verticală a secțiunii (2), deplasarea pe orizontală a secțiunii (1), şi rotirea secțiunii (3).

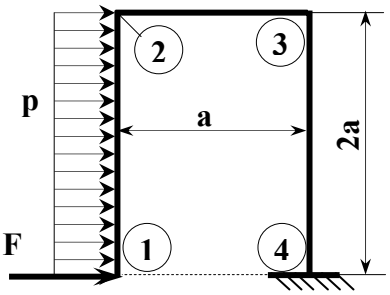


Fig.8.2.1-26

8.2.1-27

Pentru bara cotită plană, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-27, se cere să se calculeze: a) deplasarea pe orizontală în secțiunea (2), deplasarea secțiunii (5) şi rotirea secțiunii (3). Se dă: F = 1,2·p·a.

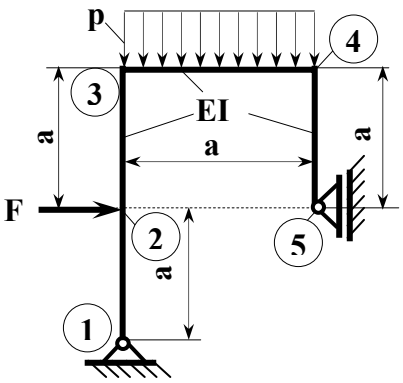


Fig.8.2.1-27

8.2.1-28

Pentru bara plană simplu rezemată, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-28, se cere să se calculeze: deplasarea pe orizontală a secțiunii (1), şi rotirea nodului rigid (2).

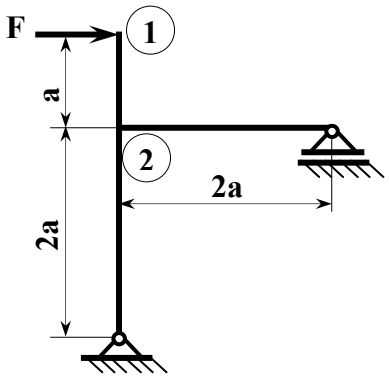


Fig.8.2.1-28

8.2.1-29

Pentru bara plană simplu rezemată, de rigiditate constantă pe intervale, EI şi 2EI, din Fig.8.2.1-29, se cere să se calculeze: deplasarea pe orizontală a secțiunii (1), şi rotirea nodului rigid (2).

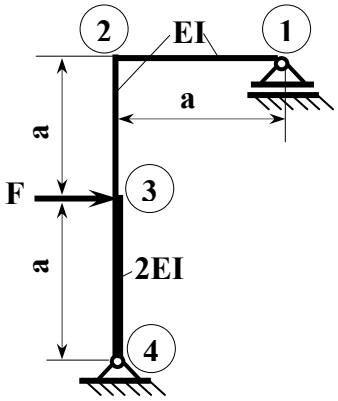


Fig.8.2.1-29

8.2.1-30

Pentru bara plană simplu rezemată, de rigiditate constantă pe intervale, EI şi 2EI, din Fig.8.2.1-30, se cere să se calculeze: deplasarea pe orizontală a secțiunii (2), deplasarea pe verticală în secțiunea (1) şi rotirea nodului rigid (2). Se dă: $M_0 = 2{,}4\ pa^2$.

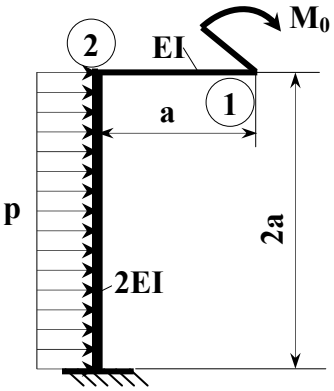


Fig.8.2.1-30

8.2.1-31

Pentru bara plană simplu rezemată, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-31, se cere să se calculeze: deplasarea pe orizontală a secțiunii (5), deplasarea pe verticală în secțiunea (1) şi rotirea secțiunii (4).

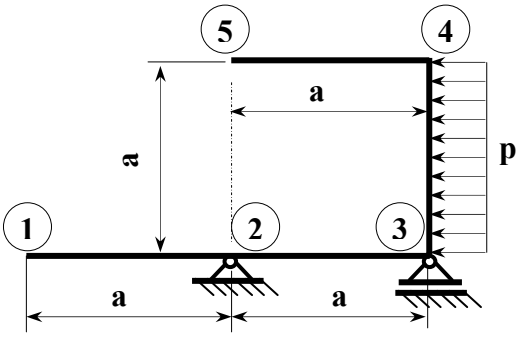


Fig.8.2.1-31

8.2.1-32

Pentru bara plană simplu rezemată, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-32, se cere să se calculeze: deplasarea pe orizontală a secțiunii (2), deplasarea pe verticală în secțiunea (1) şi rotirea secțiunii (6).

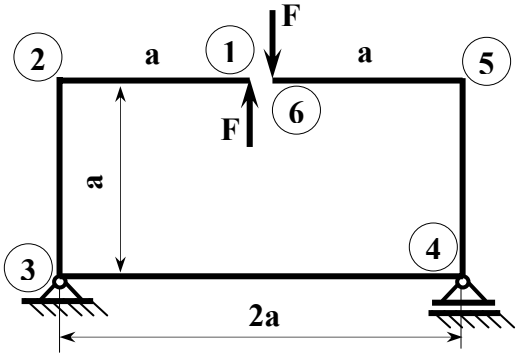


Fig.8.2.1-32

8.2.1-33

Pentru bara plană simplu rezemată, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-33, se cere să se calculeze: deplasarea pe orizontală a secțiunii (1), deplasarea pe verticală în secțiunea (3) şi rotirea reazemului mobil (1).

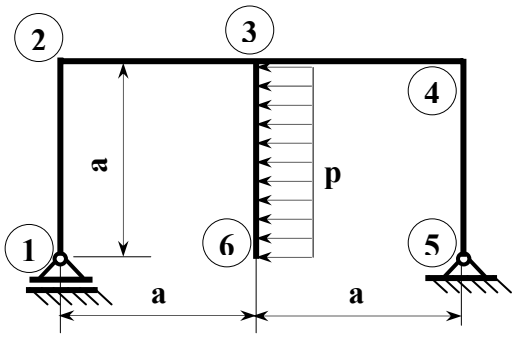


Fig.8.2.1-33

8.2.1-34

Pentru bara plană, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-34, se cere să se calculeze: deplasarea pe verticală în secțiunea (4), deplasarea secțiunii (5) şi rotirea reazemului mobil (5).

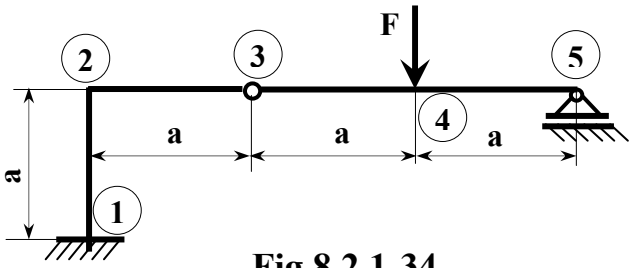


Fig.8.2.1-34

8.2.1-35

Pentru bara plană, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-35, se cere să se calculeze: deplasarea pe orizontală şi pe verticală în (1) şi rotirea aceleaşi secțiuni.

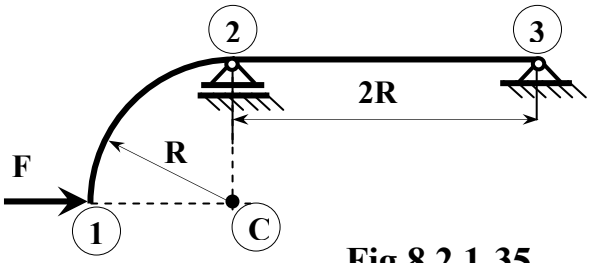


Fig.8.2.1-35

8.2.1-36

Pentru bara curbă plană, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-36, se cere să se calculeze: deplasarea pe orizontală şi pe verticală în (3) şi rotirea aceleaşi secțiuni.

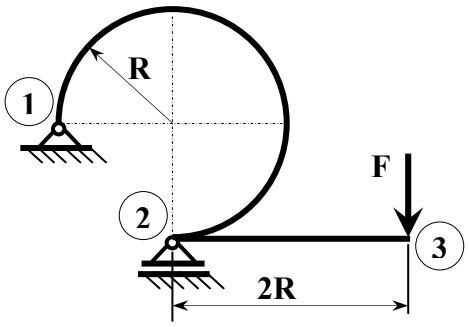


Fig.8.2.1-36

8.2.1-37

Pentru bara curbă plană, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-37, se cere să se calculeze: deplasarea verticală în secțiunea (3) şi deplasarea reazemului mobil (4). Se dă: F = pa.

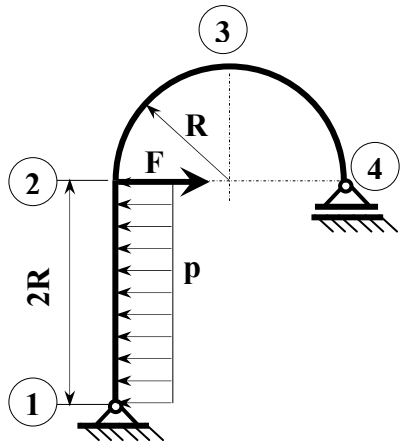


Fig.8.2.1-37

8.2.1-38

Pentru bara curbă plană de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-38, se cere să se calculeze: deplasarea pe verticală în (1) şi deplasarea reazemului mobil (4).

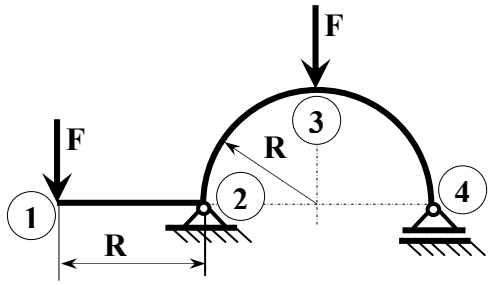


Fig.8.2.1-38

8.2.1-39

Pentru bara curbă plană de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-39, se cere să se calculeze: deplasarea pe orizontală $\delta_{h,1}$, pe verticală $\delta_{v,1}$ şi rotirea secțiunii (1), φ_1. Obs. Se va neglija efectul forței axiale.

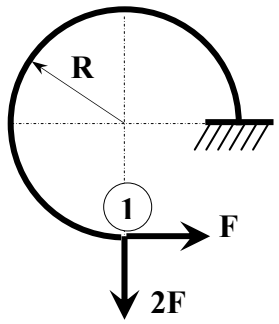


Fig.8.2.1-39

8.2.1-40

Pentru bara curbă plană articulată, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-40, se cere să se calculeze: deplasările punctului de aplicație al forței pe verticală, pe orizontală şi rotirea φ_1. Obs. Se va neglija efectul forței axiale.

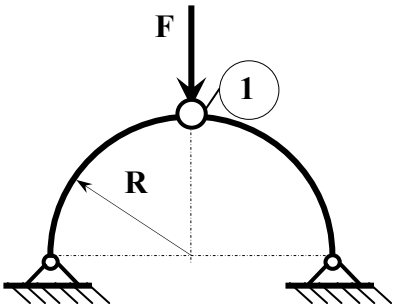


Fig.8.2.1-40

8.2.1-41

Pentru bara plană, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-41, se cere să se calculeze: deplasrea pe verticală a secțiunii (1),. Se consideră că secțiunea barei este circulară plină şi că E = 2,5G.

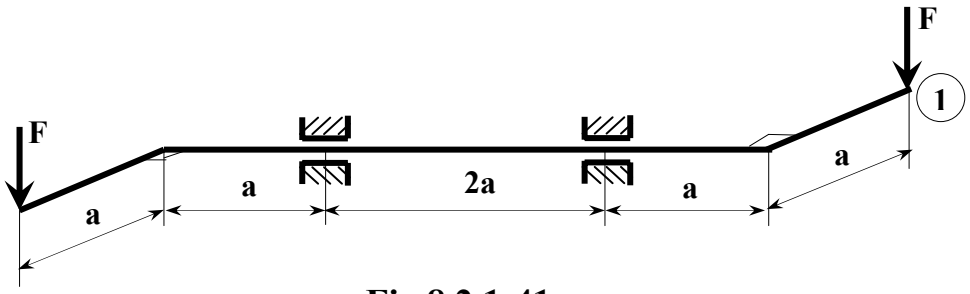


Fig.8.2.1-41

8.2.1-42

Pentru bara plană, de rigiditate constantă EI, din Fig.8.2.1-42, se cere să se calculeze deplasarea pe direcția forței F a secțiunii (1). Se consideră că secțiunea barei este circulară plină şi că G = 0,4 E.

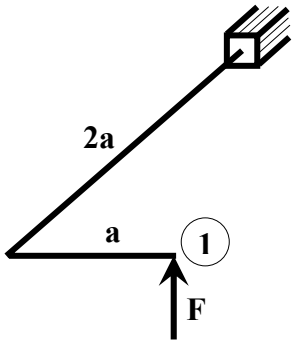


Fig.8.2.1-42

8.2.1-43

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-43, se cere să se calculeze deplasarea secțiunii (1) pe direcția forței F. Se dă F = pa/2 si E = 2,6 G.

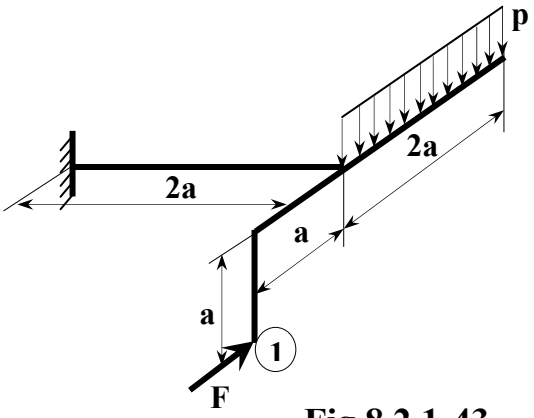


Fig.8.2.1-43

8.2.1-44

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constanta din figura alăturată, se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii (1). Se da F = pa si E = 2,6 G.

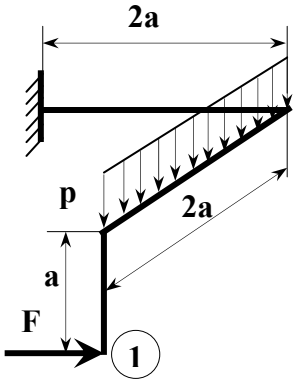


Fig.8.2.1-44

8.2.1-45

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-46, se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii (1). Se dă E = 2,6 G.

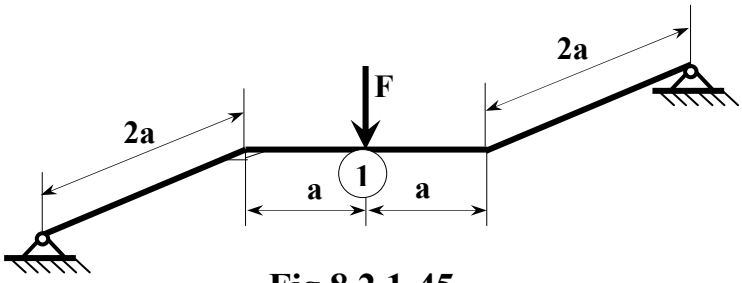


Fig.8.2.1-45

8.2.1-46

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-46, se cere să se calculeze deplasarea pe verticala a secțiunii (3). Se dă E = 2,6 G.

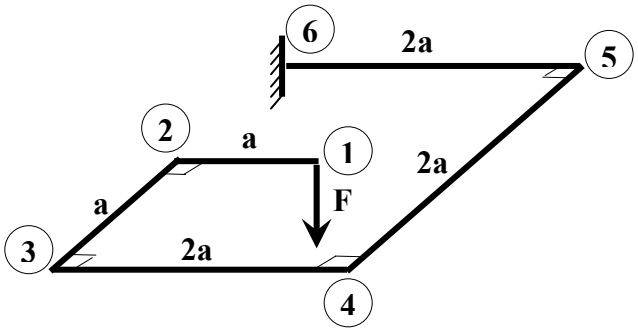


Fig.8.2.1-46

8.2.1-47

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-47, se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii (1). Se dă E = 2,5 G.

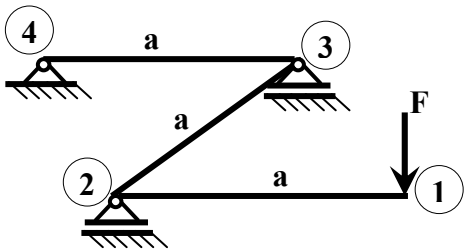


Fig.8.2.1-47

8.2.1-48

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-48, se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii (2). Se dă G = 0,4 E.

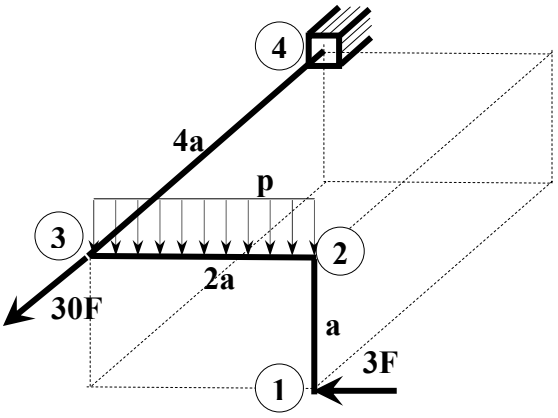


Fig.8.2.1-48

8.2.1-49

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-49, se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii (1). Se dă G = 0,4 E.

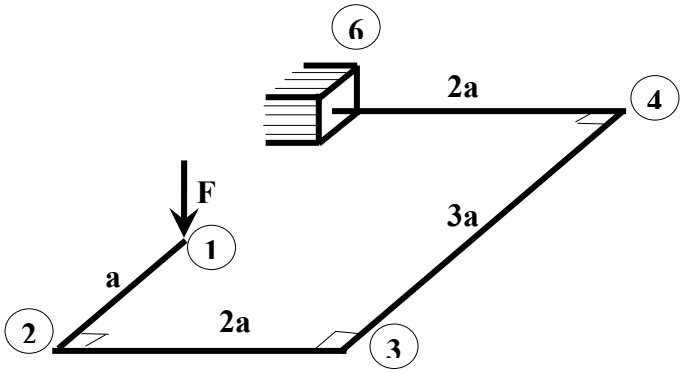


Fig.8.2.1-49

8.2.1-50

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-50, se cere să se calculeze deplasarea secțiunii (2) pe direcția forței 2F. Se dă G = 0,4 E.

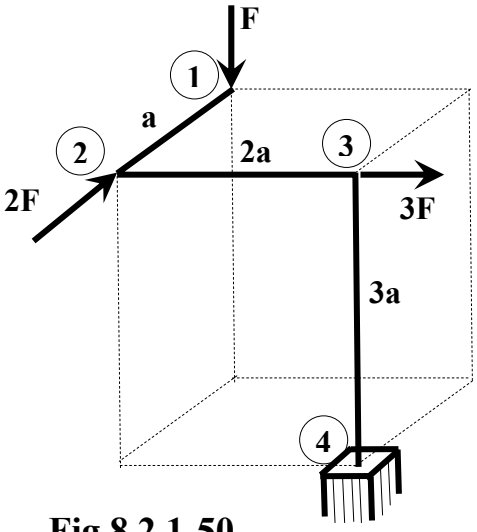


Fig.8.2.1-50

8.2.1-51

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-51, se cere să se calculeze deplasarea secțiunii (1) pe direcția forței F. Se dă G = 0,4 E.

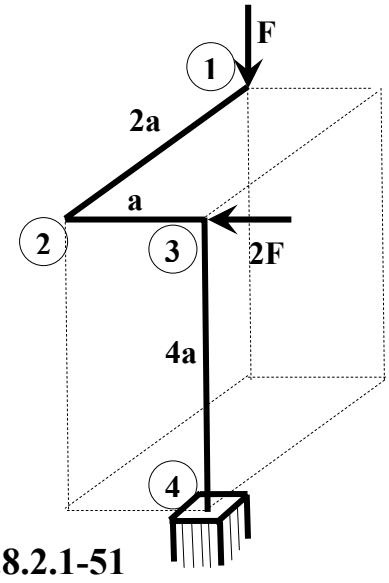


Fig.8.2.1-51

8.2.1-52

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-52, se cere să se calculeze deplasarea secțiunii (1) pe direcția forței F şi deplasarea secțiunii (2) pe direcția forței 2F. Se dă G = 0,4 E.

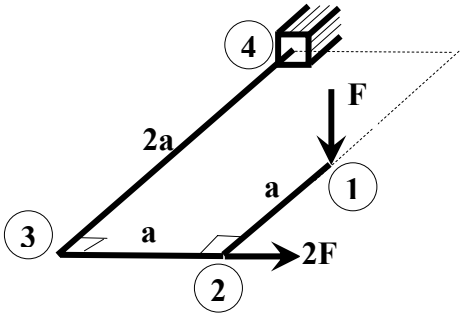


Fig.8.2.1-52

8.2.1-53

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-53, se cere să se calculeze deplasarea secțiunii (1) pe direcția forței F = 6 pa. Se dă G = 0,4 E.

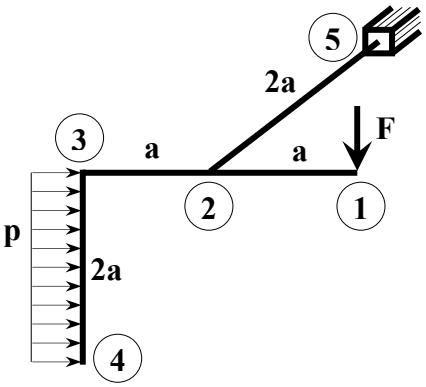


Fig.8.2.1-53

8.2.1-54

Pentru bara de oțel de secțiune circulară constantă din Fig.8.2.1-54, se cere să se calculeze deplasările secțiunii (3) pe direcție orizontală şi pe direcție verticală. Se dă G = 0,4 E.

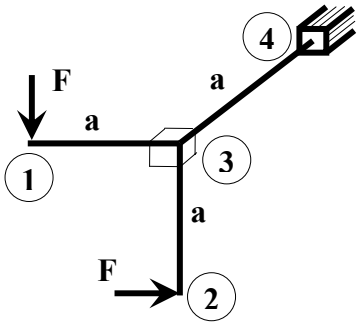


Fig.8.2.1-54

8.2.2 Sisteme static nedeterminate

8.2.2-1

Pentru bara din Fig.8.2.2-1, de rigiditate EI = constantă, se cere:

a) ridicarea nedeterminarii;

b) rotirea secțiunii (1), φ_1=?.

Se dau: p = 60 kN/m; M_0= 80 kNm; E = $2\cdot10^5$ MPa; a = 2 m; I= $13{,}5\cdot10^6$ mm^4

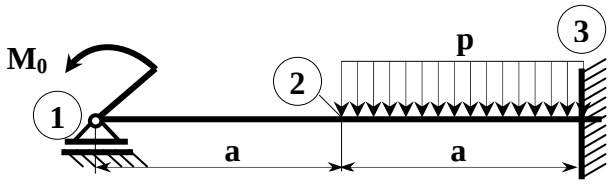


Fig.8.2.2-1

8.2.2-2

Pentru bara din Fig.8.2.2-2, de rigiditate EI = constantă, se cere:

a) ridicarea nedeterminării;

b) rotirea secțiunii (3), φ_3=?.

Se dau: p = 50 kN/m; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa: a = 2 m; I= $21{,}4\cdot10^6$ mm^4

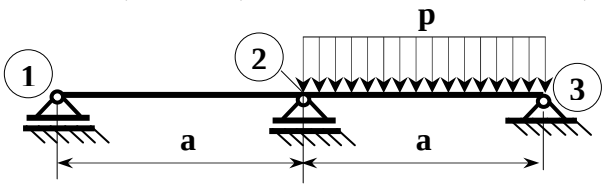


Fig.8.2.2-2

8.2.2-3

Pentru bara din Fig.8.2.2-3, de rigiditate EI = constantă, se cere rotirea secțiunii (1), φ_1=?. Se dau: F = 50 kN; M_0= 2Fa; E = $2\cdot10^5$ MPa; a = 0,5 m; I= $21{,}4\cdot10^6$ mm^4

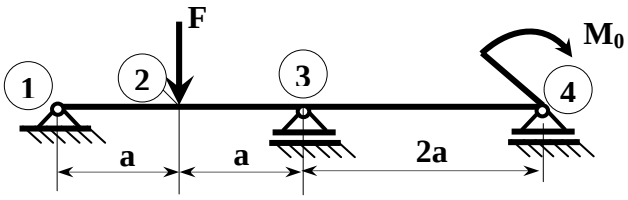


Fig.8.2.2-3

8.2.2-4

Pentru bara din Fig.8.2.2-4, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi deplasarea pe verticală a secțiunii (3), δ_3=?. Se dă: M_0= Fa.

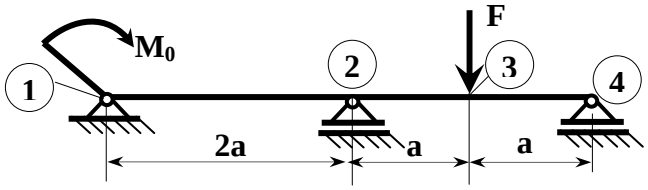


Fig.8.2.2-4

8.2.2-5

Pentru bara din Fig.8.2.2-5, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi deplasarea pe verticală a secțiunii (3), δ_3=?. Se dă: M_0= Fa.

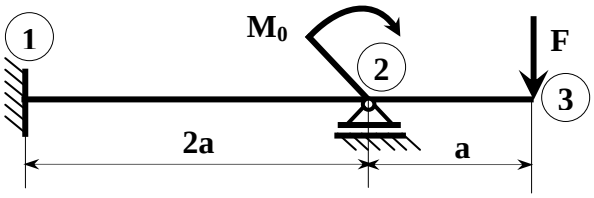


Fig.8.2.2-5

8.2.2-6

Pentru bara din Fig.8.2.2-6, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi calculul săgeții în capătul liber (4), δ_4=?. Se dă: F = 5 kN, a = 1 m, I = $1{,}71\cdot10^6$ mm^4, E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa.

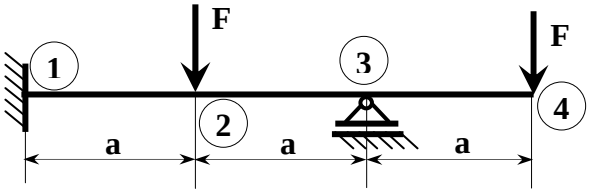


Fig.8.2.2-6

8.2.2-7

Pentru bara din Fig.8.2.2-7, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramelor de eforturi.

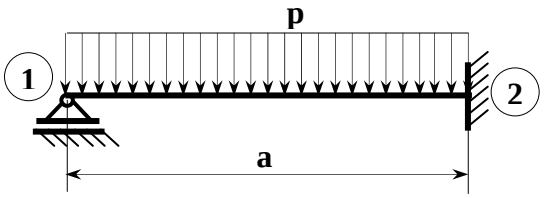


Fig.8.2.2-7

8.2.2-8

Pentru bara din Fig.8.2.2-8, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramelor de eforturi.

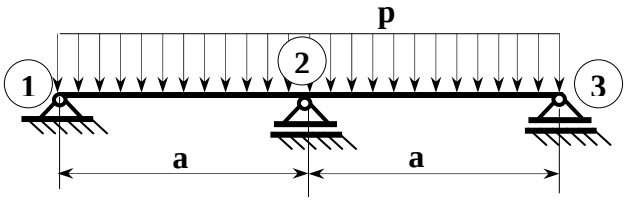


Fig.8.2.2-8

8.2.2-9

Pentru bara din Fig.8.2.2-9, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării.

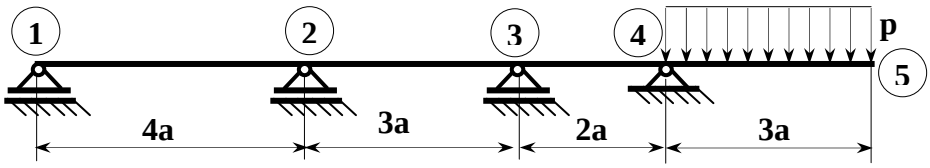


Fig.8.2.2-9

8.2.2-10

Pentru bara din Fig.8.2.2-10, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării.

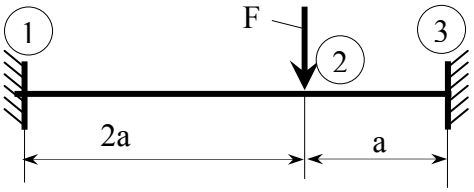


Fig.8.2.2-10

8.2.2-11

Pentru bara din Fig.8.2.2-11, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, calculul deplasării secțiunii (1), δ_1, şi rotirea în secțiunea (2), φ_2.

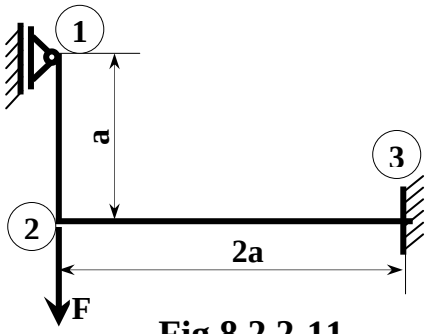


Fig.8.2.2-11

8.2.2-12

Pentru bara din Fig.8.2.2-12, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi rotirea în secțiunea (2), φ_2.

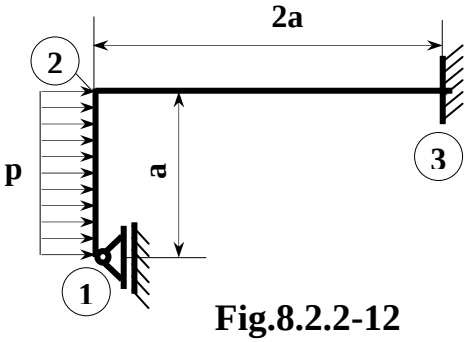


Fig.8.2.2-12

8.2.2-13

Pentru bara din Fig.8.2.2-13, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi calculul deplasării secțiunii (1), δ_1.

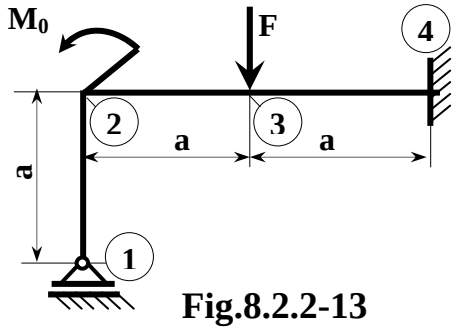


Fig.8.2.2-13

8.2.2-14

Pentru bara din Fig.8.2.2-14, de rigiditate EI = constantă, se cere: calculul deplasării pe orizontală a secțiunii (1), δ_1, şi a rotirii în secțiunea (3), φ_3. Se dau: M_0= 1,6(6) Fa

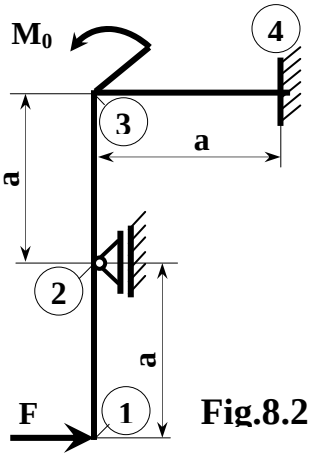


Fig.8.2.2-14

8.2.2-15

Pentru bara din Fig.8.2.2-15, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi rotirea în secțiunea (2), φ_2. Se dă: $M_0 = pa^2/2$.

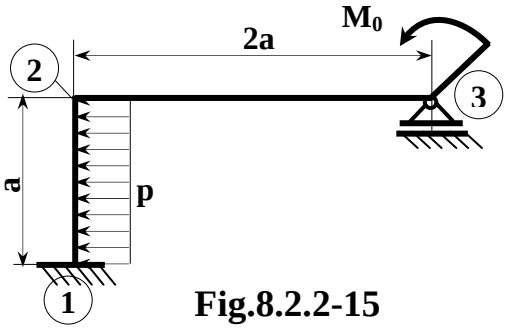


Fig.8.2.2-15

8.2.2-16

Pentru bara din Fig.8.2.2-16, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi rotirea în secțiunea (2), φ_2. Se dă: $M_0 = pa^2/2$.

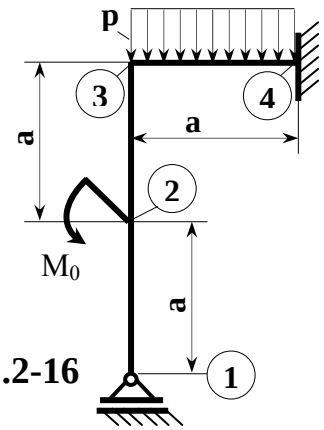


Fig.8.2.2-16

8.2.2-17

Pentru bara din Fig.8.2.2-17, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi rotirea în secțiunea (3), φ_3. Se dă: $M_0 = pa^2/2$.

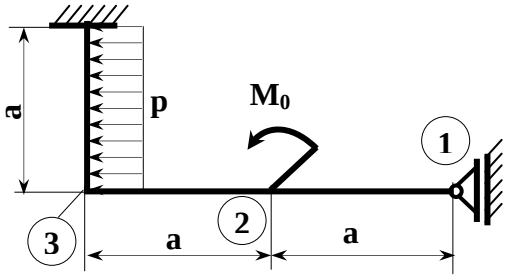


Fig.8.2.2-17

8.2.2-18

Pentru bara din Fig.8.2.2-18, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi rotirea în secțiunea (3), φ_3. Se dă: F = pa.

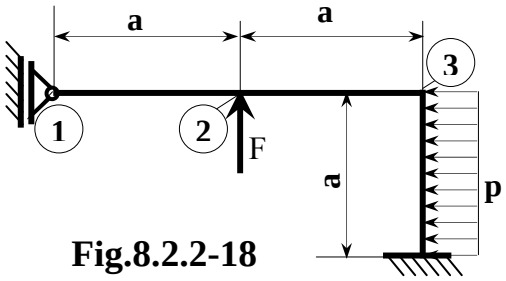


Fig.8.2.2-18

8.2.2-19

Pentru bara din Fig.8.2.2-19, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi rotirea în secțiunea (3), φ_3. Se dă: F = pa.

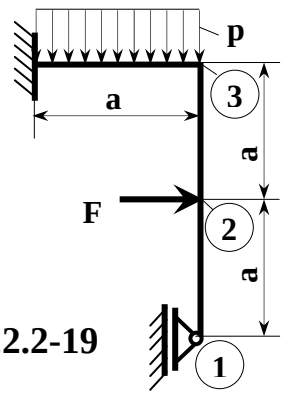


Fig.8.2.2-19

8.2.2-20

Pentru bara din Fig.8.2.2-20, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi rotirea în secțiunea (3), φ_3. Se dă: F = pa şi M_0= pa^2.

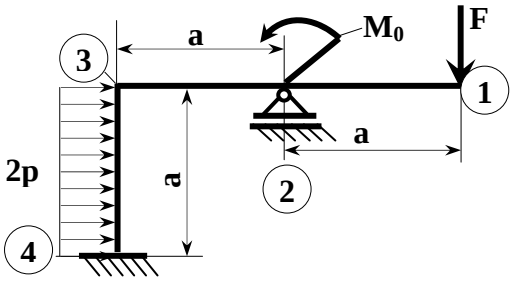


Fig.8.2.2-20

8.2.2-21

Pentru bara din Fig.8.2.2-21, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi rotirea în secțiunea (1), φ_1. Se dă: M_0= $4pa^2$.

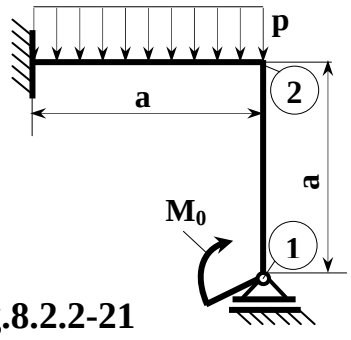


Fig.8.2.2-21

8.2.2-22

Pentru bara din Fig.8.2.2-22, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi trasarea diagramelor de eforturi. Se dau: a = 3 m; b = 4 m; c = 5 m; p = 20 kN/m.

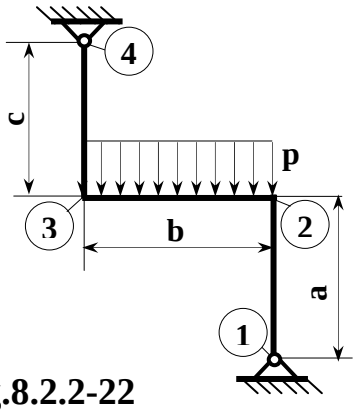


Fig.8.2.2-22

8.2.2-23

Pentru bara din Fig.8.2.2-23, se cere: ridicarea nedeterminării, trasarea diagramelor de eforturi şi calculul deplasării pe orizontală, δ_2, şi a rotirii în secțiunea (2), φ_2.

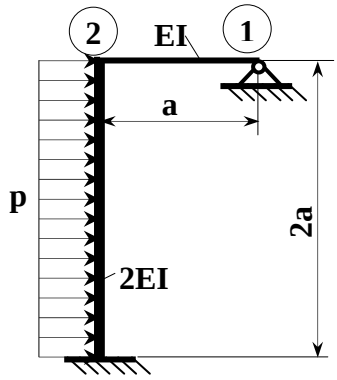


Fig.8.2.2-23

8.2.2-24

Pentru bara din Fig.8.2.2-24, de rigiditate EI = constantă, se cere: ridicarea nedeterminării, şi trasarea diagramelor de eforturi.

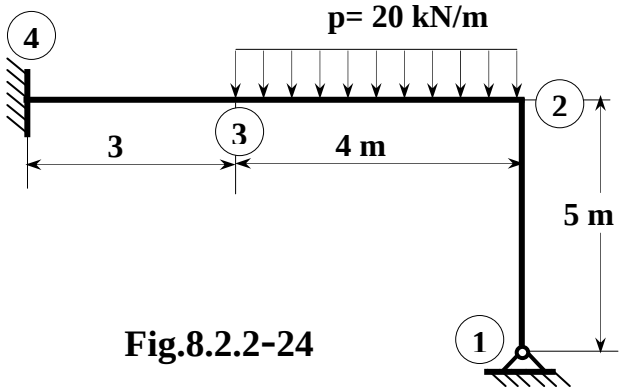


Fig.8.2.2-24

8.2.2-25

Pentru bara din Fig.8.2.2-25, se cere: ridicarea nedeterminării, trasarea diagramelor de eforturi şi calculul deplasării în secțiunea (1), δ_1.

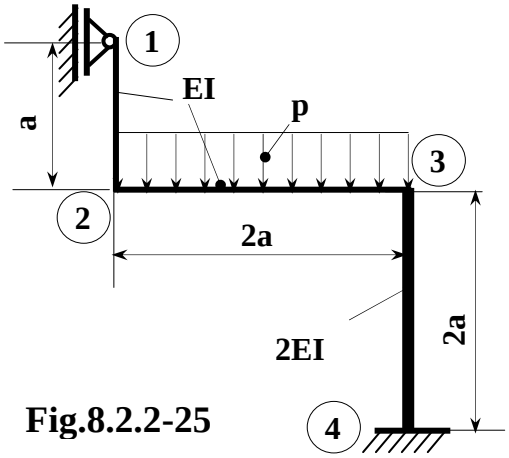


Fig.8.2.2-25

8.2.2-26

Pentru bara din Fig.8.2.2-26, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării.

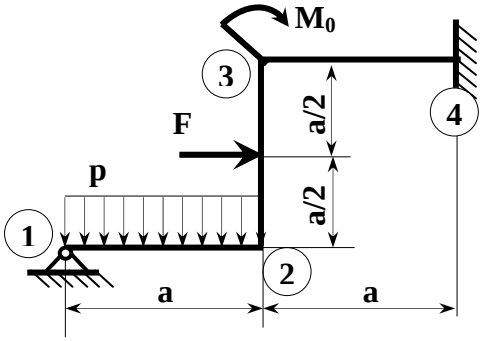


Fig.8.2.2-26

8.2.2-27

Pentru bara din Fig.8.2.2-27, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramelor de eforturi şi calculul deplasării, δ_1, şi a rotirii, φ_1, sectiunii (1).

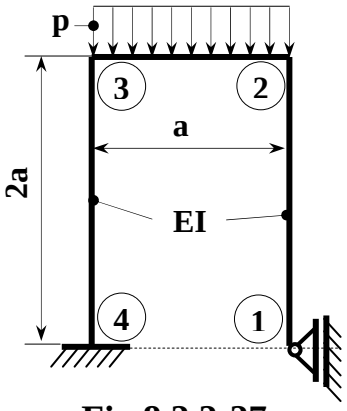


Fig.8.2.2-27

8.2.2-28

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-28, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramelor de eforturi. Se dă: p = 20 kN/m.

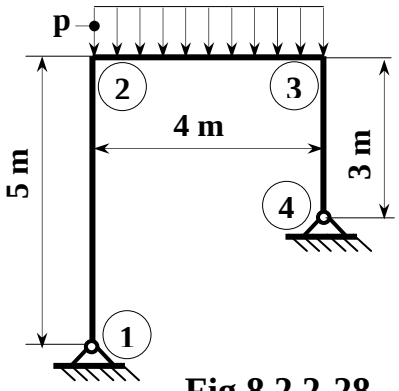


Fig.8.2.2-28

8.2.2-29

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-29, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramelor de eforturi şi calculul deplasărilor din secțiunea (1), δ_1 şi φ_1.

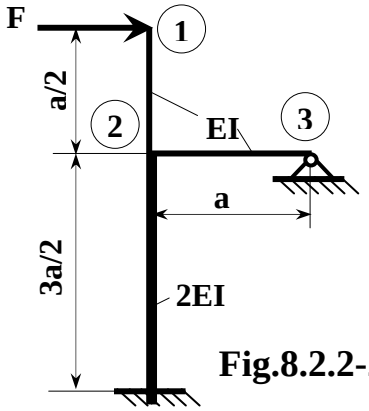


Fig.8.2.2-29

8.2.2-30

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-30, se cere ridicarea nedeterminării, şi trasarea diagramelor de eforturi. Se dă: p = 20 kN/m.

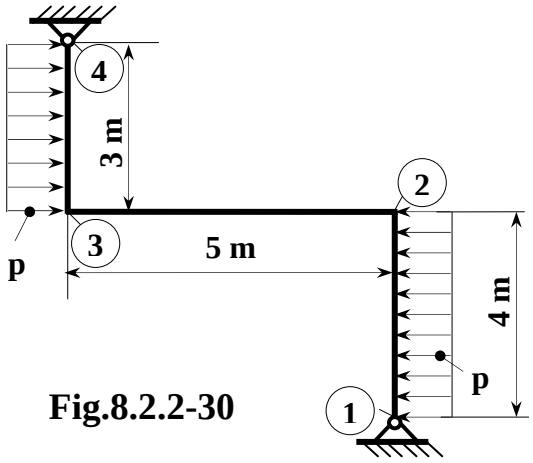


Fig.8.2.2-30

8.2.2-31

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-31, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, şi trasarea diagramelor de eforturi.

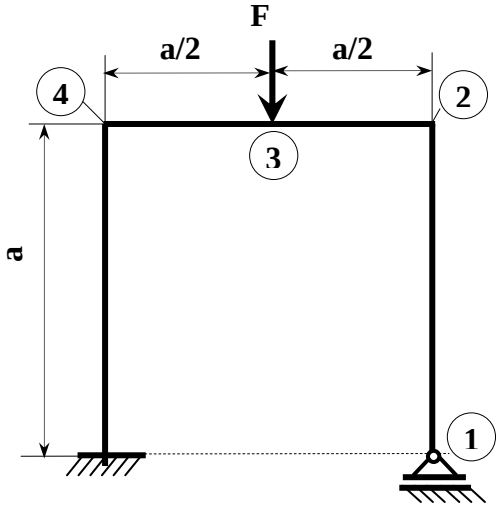


Fig.8.2.2-31

8.2.2-32

Pentru bara articulată din Fig.8.2.2-32, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, şi trasarea diagramelor de eforturi. Se dau: p = 20 kN/m, a = 2,5 m, b = 4 m, c = 3 m.

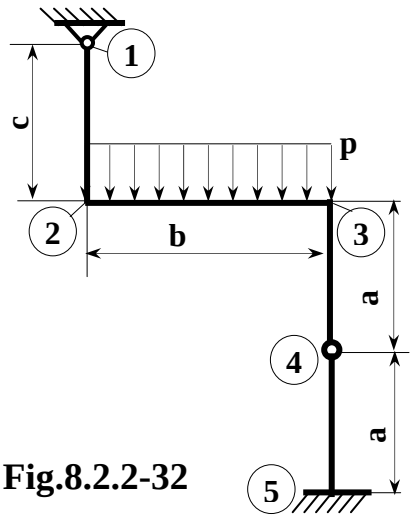


Fig.8.2.2-32

8.2.2-33

Pentru bara articulată din Fig.8.2.2-33, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, şi trasarea diagramelor de eforturi. Se dau: p = 20 kN/m, a = 3 m, b = 4 m, c = 5 m.

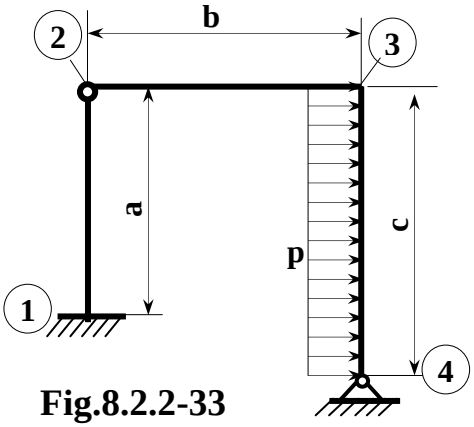


Fig.8.2.2-33

8.2.2-34

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-34, confecționat din bare de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, şi trasarea diagramelor de eforturi. Se dau: p = 20 kN/m, a = 4 m, b = 2,5 m, c = 5 m.

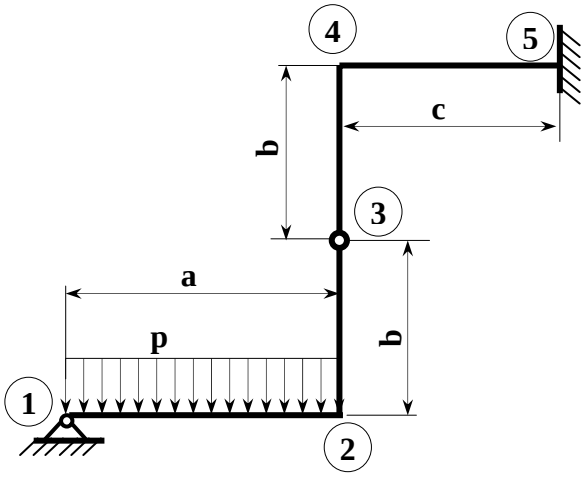


Fig.8.2.2-34

8.2.2-35

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-35, confecționat din bare de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, şi trasarea diagramelor de eforturi.

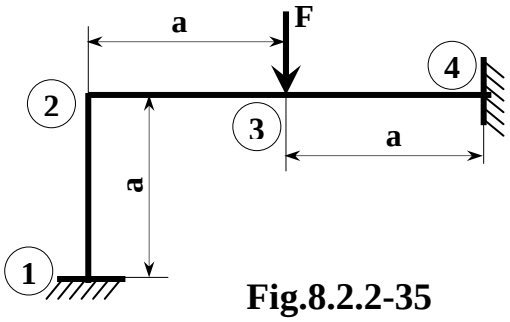


Fig.8.2.2-35

8.2.2-36

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-36, confecționat din bare de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramelor de eforturi şi calculul depasării secțiunii (3), δ_3.

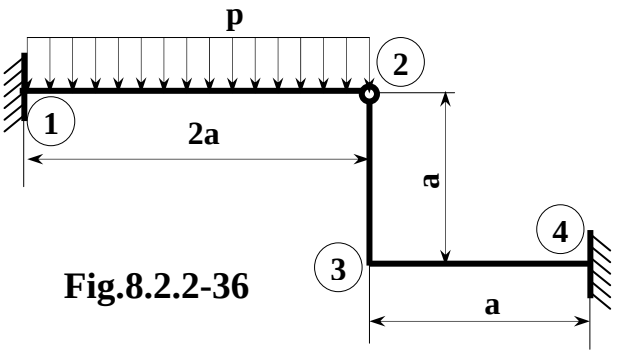


Fig.8.2.2-36

8.2.2-37

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-37, se cere ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramelor de eforturi. Se dă $M_0 = pa^2$.

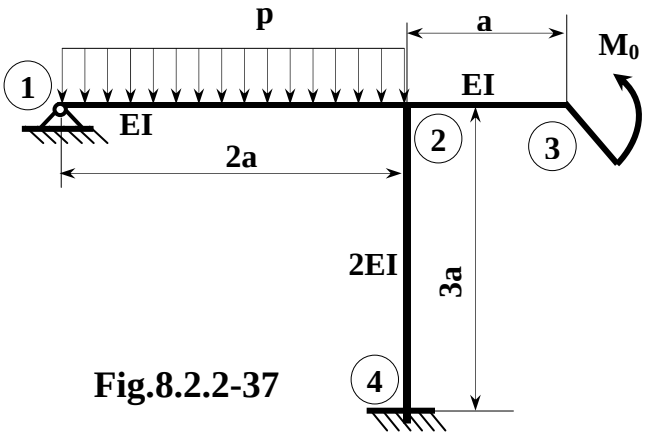


Fig.8.2.2-37

8.2.2-38

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-38, confecționat din bare de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramelor de eforturi şi calculul depasării secțiunii (3), δ_3.

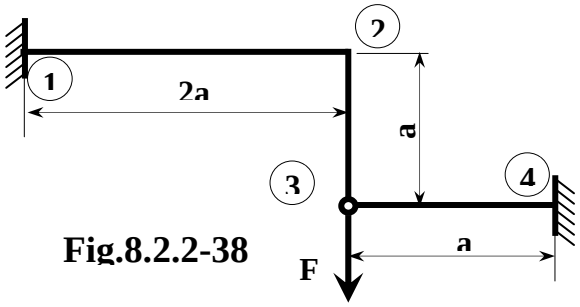


Fig.8.2.2-38

8.2.2-39

Pentru sistemul de bare din Fig.8.2.2-39, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramelor T şi M_i.

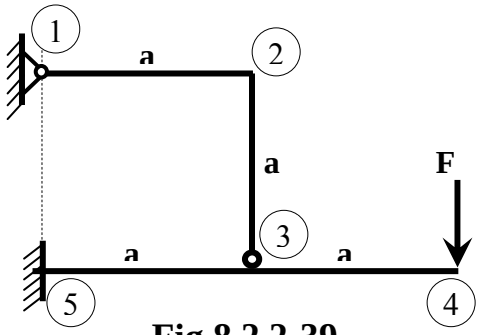
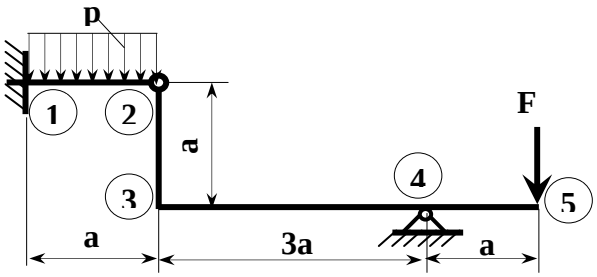


Fig.8.2.2-39

8.2.2-40

Pentru sistemul de bare din Fig.8.2.2-40, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramei M_i şi calculul deplasării articulației (4)

Fig.8.2.2-40



8.2.2-41

Pentru bara cotită curbă din Fig.8.2.2-41, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramelor de eforturi şi calculul deplasării secțiunii (2), δ_2 = ?. Secțiunea barei este circulară cu diametrul d = 24 mm. Se dau: R = 120 mm; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; p = 1,2 kN/m.

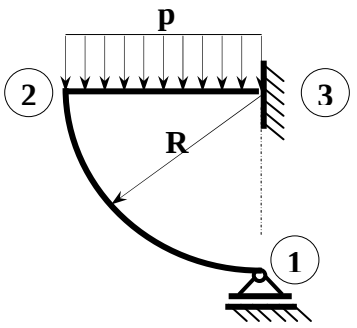


Fig.8.2.2-41

8.2.2-42

Pentru bara cotită curbă din Fig.8.2.2-42, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, şi calculul deplasării secțiunii (1), δ_1 = ?. Secțiunea barei este circulară cu diametrul d = 24 mm. Se dau: R = 120 mm; E = $2{,}1\cdot10^5$ MPa; F = 1,6 kN.

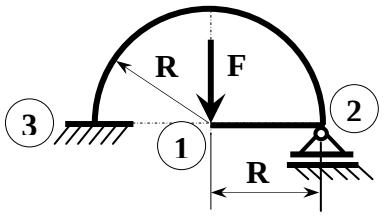


Fig.8.2.2-42

8.2.2-43

Pentru bara cotită curbă din Fig.8.2.2-43, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, şi calculul deplasării secțiunii (1), δ_1 = ?.

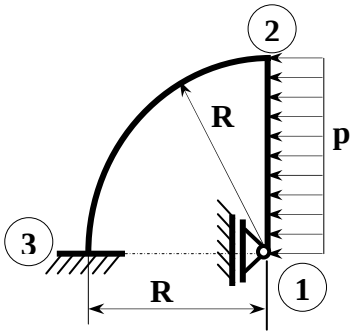


Fig.8.2.2-43

8.2.2-44

Pentru bara din Fig.8.2.2-44, de rigiditate EI = constantă, cu R = 150 mm şi b·h = 60·100 mm^2, se cere ridicarea nedeterminării, şi calculul rotirii secțiunii (3), φ_3 = ?.

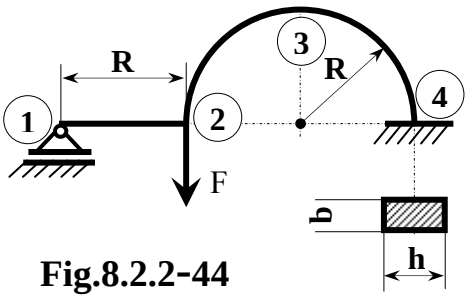


Fig.8.2.2-44

8.2.2-45

Arcul de formă semicirculară, din Fig.8.2.2-45, cu secțiune constantă b·h = 60·100 mm^2, este articulate de tirantul cu secțiune circulară cu d = 30 mm. Cunoscând: R = 800 mm, F = 80 kN, se cere ridicarea nedeterminării şi calculul deplasării secțiunii (D), δ_D = ?.

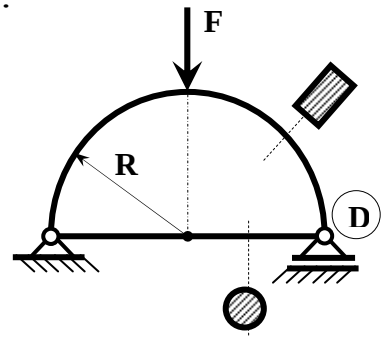


Fig.8.2.2-45

8.2.2-46

Pentru bara din Fig.8.2.2-46, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, să se traseze diagramele de eforturi şi să se calculeze rotirea secțiunii (2), φ_2 = ?.

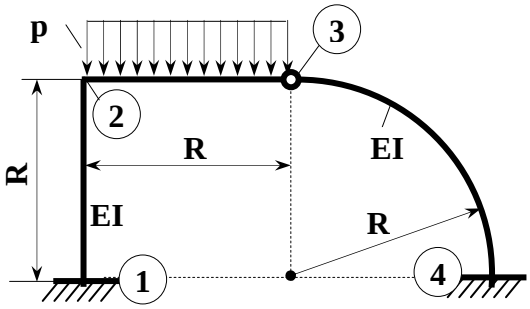


Fig.8.2.2-46

8.2.2-47

Pentru bara din Fig.8.2.2-47, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi să se traseze diagramele de eforturi.

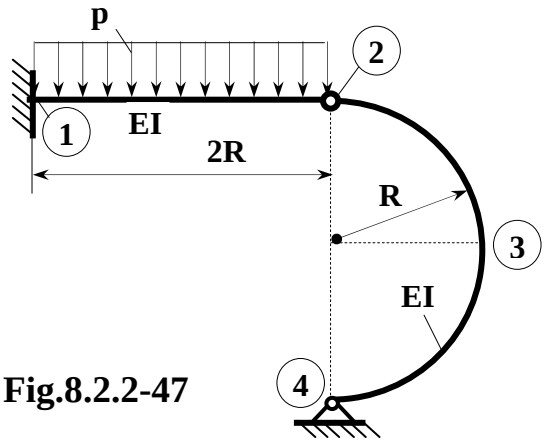


Fig.8.2.2-47

8.2.2-48

Pentru bara din Fig.8.2.2-48, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi să calculeze deplasarea articulației (3), δ_3 = ?.

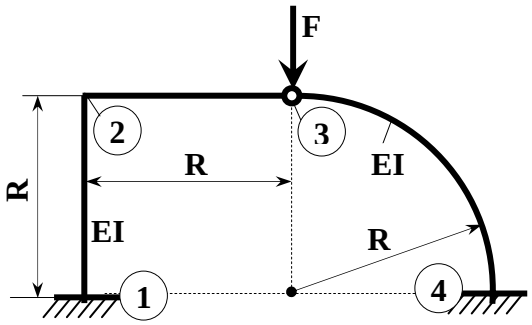


Fig.8.2.2-48

8.2.2-49

Pentru bara din Fig.8.2.2-49, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramelor de eforturi.

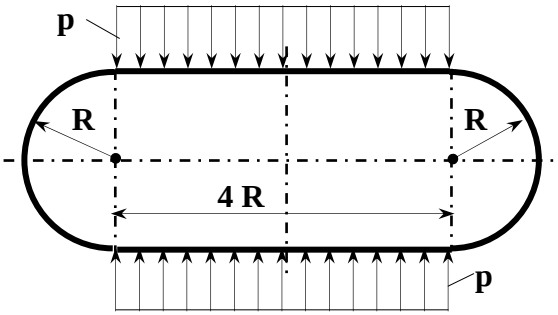


Fig.8.2.2-49

8.2.2-50

Pentru bara din Fig.8.2.2-50, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramei de momente (M_i) şi calculul variației distanței dintre secțiunile (B) şi (C), Δ_{BC} = ?.

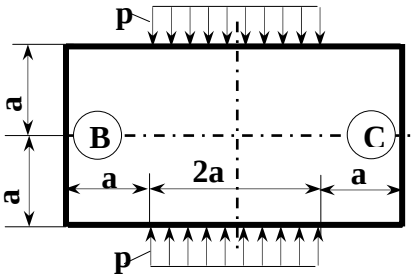


Fig.8.2.2-50

8.2.2-51

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-51, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramei de momente (M_i).

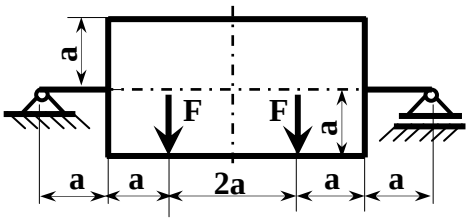


Fig.8.2.2-51

8.2.2-52

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-52, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramelor de eforturi şi calculul deplasării secțiunii din planul de simetrie (3), δ_3 = ?.

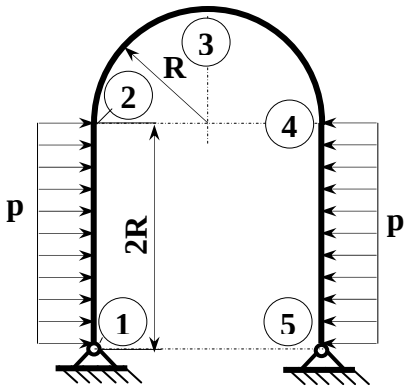


Fig.8.2.2-52

8.2.2-53

Pentru cadrul închis din Fig.8.2.2-53, de rigiditate EI = constantă, se cere ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramelor de eforturi.

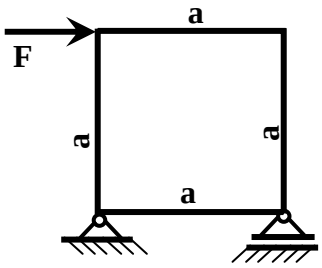


Fig.8.2.2-53

8.2.2-54

Bara cotită 1-2-3-4 din Fig.8.2.2-54, de rigiditate EI = constantă, are capetele (1) şi (4) unite printr-un fir cu rigiditate constantă la întindere: EA_0. Cunoscând: a = 1 m, A_0 = 240 mm^2, I = $2\cdot10^7$ mm^4, E = $2\cdot10^5$ MPa, F = 80 kN, se cere ridicarea nedeterminării şi variația distanței dintre secțiunile (1) şi (4), Δ_{1-4} = ?.

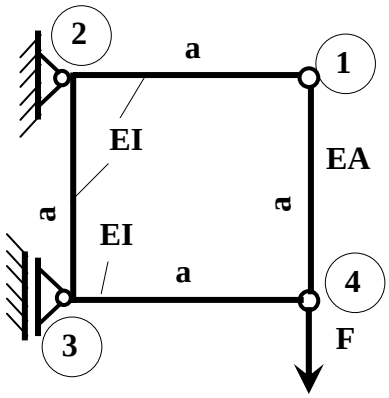


Fig.8.2.2-54

8.2.2-55

Pentru cadrul închis din Fig.8.2.2-55, se cere ridicarea nedeterminării, determinarea momentului de încovoiere maxim şi calculul deplasării relative dintre secțiunile din planul de simetrie, Δ_{B-C} = ?.

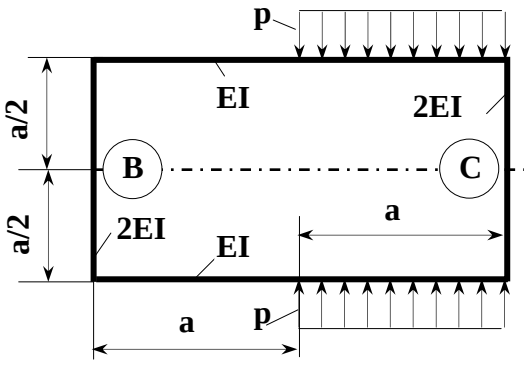


Fig.8.2.2-55

8.2.2-56

Pentru cadrul de rigiditate EI = constantă, din Fig.8.2.2-56, se cere ridicarea nedeterminării şi trasarea diagramelor de eforturi.

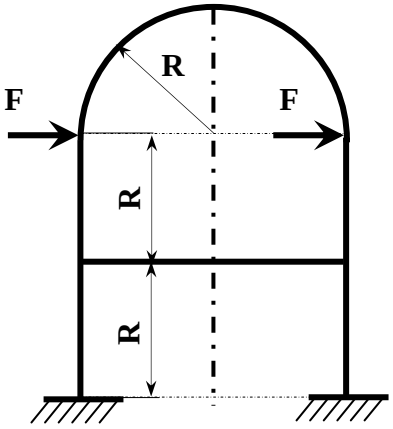


Fig.8.2.2-56

8.2.2-57

Pentru cadrul de rigiditate EI = constantă, din Fig.8.2.2-57, se cere ridicarea nedeterminării şi determinarea momentului maxim.

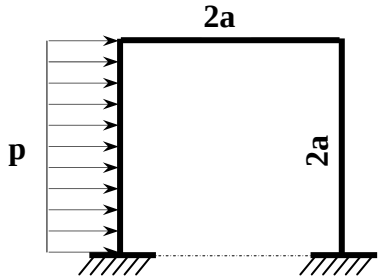


Fig.8.2.2-57

8.2.2-58

Pentru cadrul din Fig.8.2.2-58, se cere ridicarea nedeterminării, trasarea diagramei momentului de încovoiere şi calculul deplasării pe orizontală a secțiunii (3), δ_3 = ?

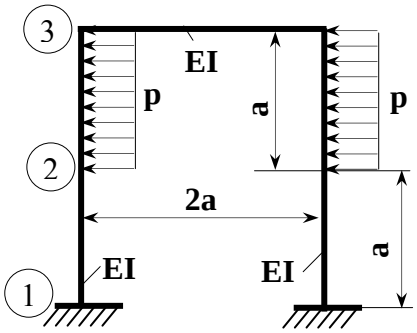


Fig.8.2.2-58

8.2.2-59

Bara cotită de secțiune circulară din Fig.8.2.2-59, este încastrată în (3) şi simplu rezemată în (1). Se cere ridicarea nedeterminării şi calculul deplasării secțiunii (2), δ_2 = ?. Se dă: E = 2,6·G

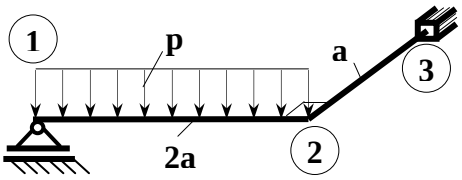


Fig.8.2.2-59

8.2.2-60

Bara rigidă BC din Fig.8.2.2-60, este susținută de 3 tiranți: (1), (2) şi (3), şi solicitată de forța F. Cei trei tiranți au aceeaşi lungime, (a), sunt din acelaşi material şi au secțiunile $A_1 = A_2 = A$ şi $A_3 = 2A$. Se cer eforturile din tiranți, N_1, N_2 şi N_3.

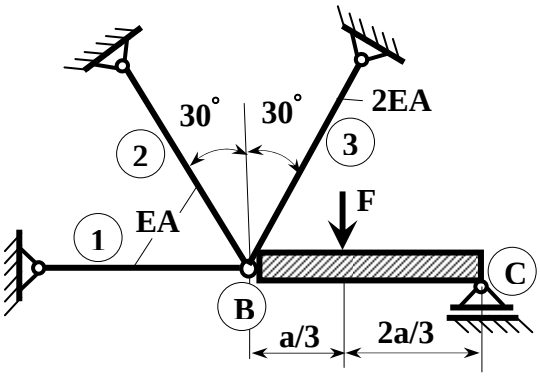


Fig.8.2.2-60

8.3 CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL BARELOR CURBE PLANE

8.3-1

Pentru bara curbă de secțiune dreptunghiulară din Fig.8.3-1 se cere:

a) forța capabilă pentru $\sigma_{max} = \sigma_a$

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă

Se cunosc: R_i = 240 mm, σ_a = 150 MPa.

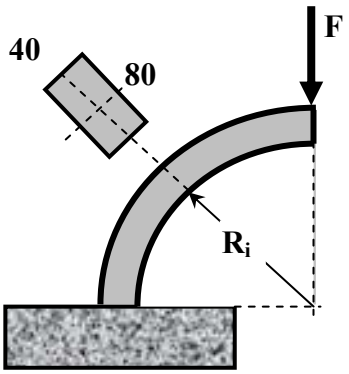


Fig.8.3-1

8.3-2

Pentru bara curbă de secțiune circulară de diametru d din Fig.8.3-2 se cere:

a) verificarea condiției de rezistență pentru σ_a

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 10 kN, R = 200 mm, d = 80 mm, σ_a = 150 MPa.

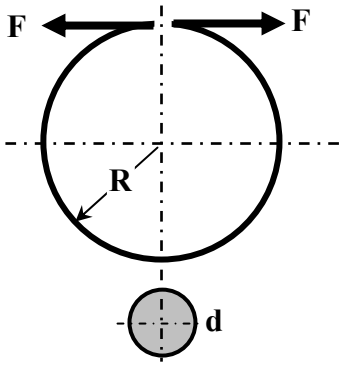


Fig.8.3-2

8.3-3

Pentru bara curbă de secțiune patrată cu latura b din Fig.8.3-3 se cere:

a) verificarea condiției de rezistență pentru σ_a

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 2 kN, R = 200 mm, b = 40 mm, σ_a = 150 MPa.

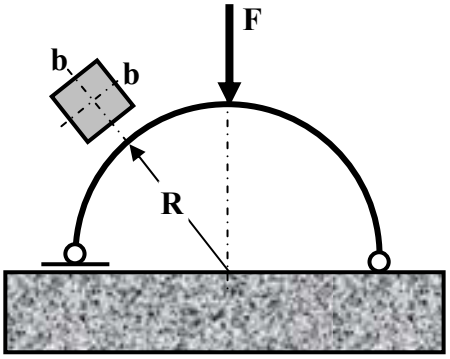


Fig.8.3-3

8.3-4

Pentru bara curbă de secțiune inelară din Fig.8.3-4 se cere:

a) forța capabilă pentru $\sigma_{max} = \sigma_a$

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: R = 300 mm, d = 40 mm, D = 60 mm, σ_a = 160 MPa.

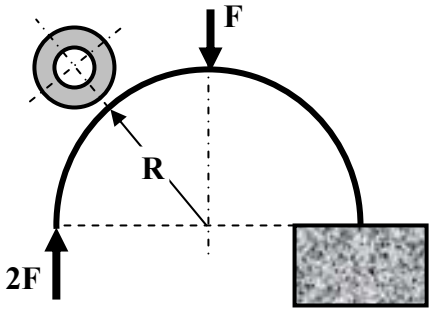


Fig.8.3-4

8.3-5

Pentru bara curbă de secțiune circulară din Fig.8.3-4 se cere:

a) forța capabilă pentru $\sigma_{max} = \sigma_a$

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: R = 150 mm, d = 30 mm, σ_{at} = 30 MPa, σ_{ac} = 90 MPa.

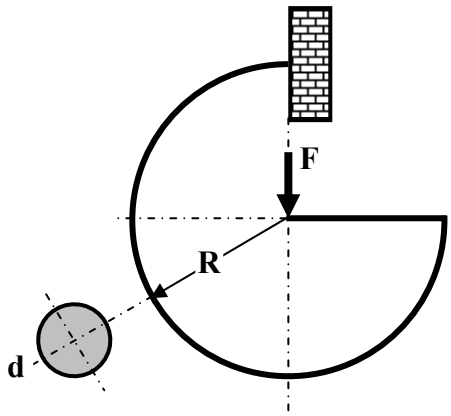


Fig.8.3-5

8.3-6

Pentru bara curbă de secțiune circulară cu diametrul d din Fig.8.3-6 se cere:

a) verificarea condiției de rezistență pentru σ_a

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 10 kN, R = 120 mm, d = 40 mm, σ_a = 150 MPa.

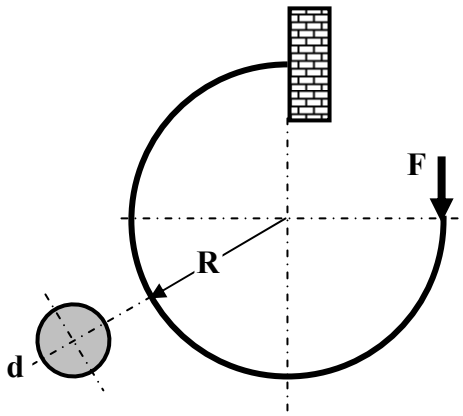


Fig.8.3-6

8.3-7

Pentru bara circulară cu diametrul d din Fig.8.3-7 se cere:

a) teniunea normală maximă şi minimă

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 10 kN, p = 4 kN/m, R = 1.000 mm, d = 200 mm.

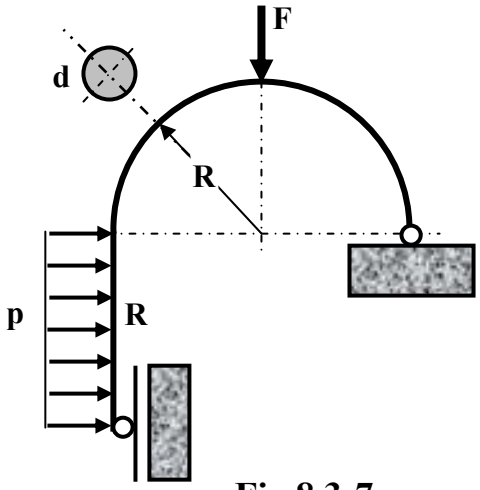


Fig.8.3-7

8.3-8

Pentru bara de secţiune dreptunghiulară din Fig.8.3-8 se cere:

a) teniunea normală maximă şi minimă

b) diagrama de variaţie a tensiunii normale σ din secţiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 2 kN, R = 300 mm.

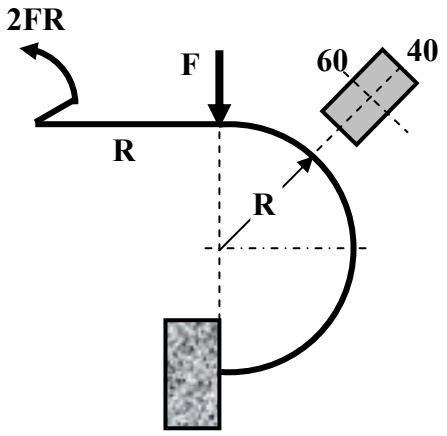


Fig.8.3-8

8.3-9

Pentru bara de secţiune circulară cu diametrul d din Fig.8.3-9 se cere:

a) teniunea normală maximă şi minimă

b) diagrama de variaţie a tensiunii normale σ din secţiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 12 kN, d = 60 mm, R = 180 mm.

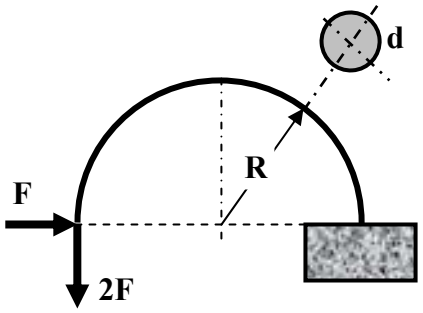


Fig.8.3-9

8.3-10

Pentru bara de secțiune dreptunghiulară din Fig.8.3-10 se cere:

a) forța capabilă pentru $\sigma_{max} = \sigma_a$

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: R = 400 mm, b = 100 mm, σ_a = 150 MPa.

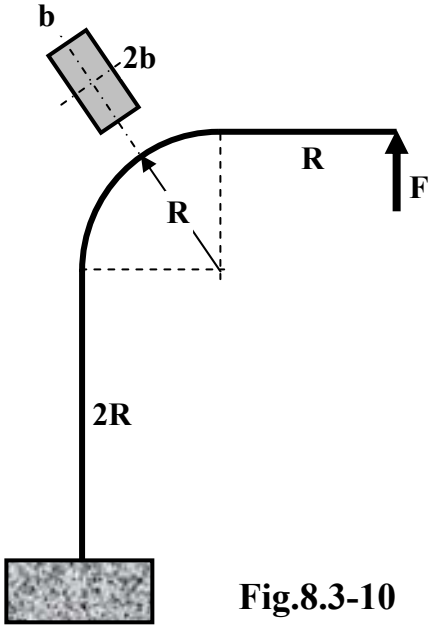


Fig.8.3-10

8.3-11

Pentru bara de secțiune circulară cu diametrul d din Fig.8.3-11 se cere:

a) verificarea condiției de rezistență

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 20 kN, d = 100 mm, R = 500 mm, σ_a = 200 MPa.

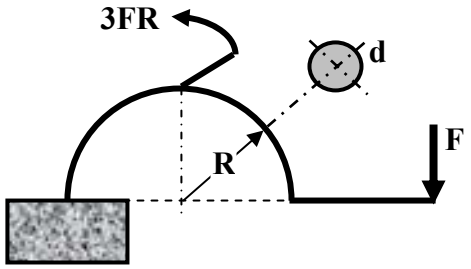


Fig.8.3-11

8.3-12

Pentru bara din Fig.8.3-10 se cere:

a) forța capabilă pentru σ_{at} = 60 MPa şi σ_{ac} = 200 MPa

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: $R_i = 12t$, t = 10 mm.

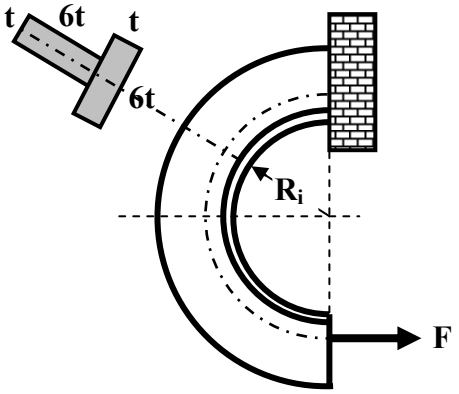


Fig.8.3-12

8.3-13

Pentru bara din Fig.8.3-13 se cere:

a) forța capabilă pentru σ_a = 150 MPa

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: R = 320 mm, b = 40 mm

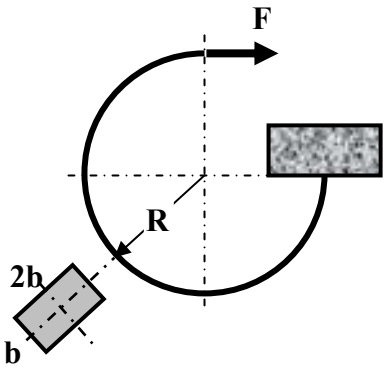


Fig.8.3-13

8.3-14

Pentru bara de secțiune patrată cu latura b din Fig.8.3-14 se cere:

a) verificarea condiției de rezistență

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 18 kN, b = 80 mm, R = 240 mm, σ_a = 150 MPa.

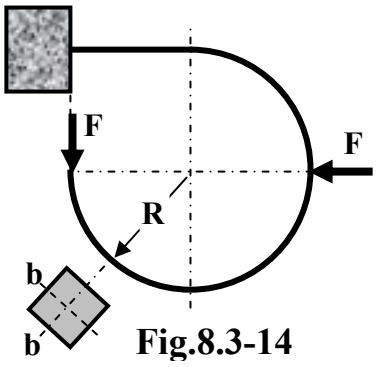


Fig.8.3-14

8.3-15

Pentru bara din Fig.8.3-15 se cere:

a) forța capabilă pentru σ_{at} = 40 MPa, σ_{ac} = 120 MPa

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: R = 200 mm, b = 50 mm.

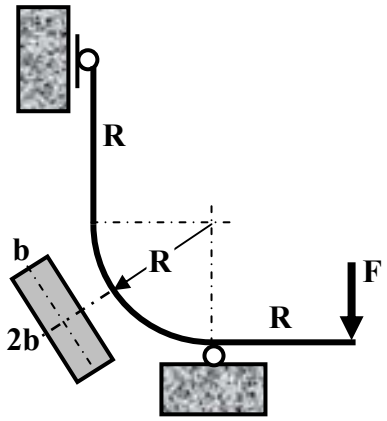


Fig.8.3-15

8.3-16

Pentru bara din Fig.8.3-16 se cere:

a) momentul capabil pentru σ_a = 150 MPa

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: R = 180 mm, d = 60 mm.

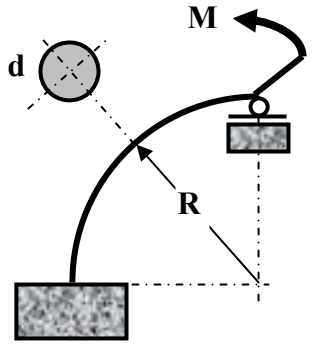


Fig.8.3-16

8.3-17

Pentru bara de secțiune circulară din Fig.8.3-17 se cere:

a) verificarea condiției de rezistență pentru σ_a = 160 MPa,

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 25 kN, d = 20 mm, R = 60 mm.

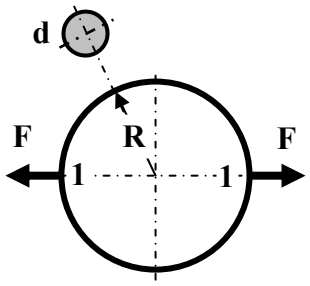


Fig.8.3-17

8.3-18

Pentru bara din Fig.8.3-18 se cere:

a) forța capabilă pentru σ_a = 150 MPa

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: R = 200 mm, b = 60 mm, d = 40 mm.

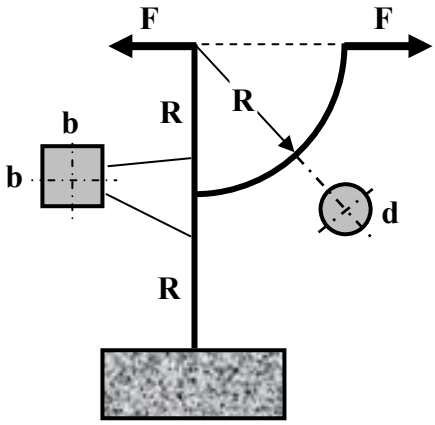


Fig.8.3-18

8.3-19

Pentru bara de secțiune patrată din Fig.8.3-19 se cere:

a) tensiunea normală maximă şi minimă

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: F = 2 kN, b = 40 mm, R = 200 mm.

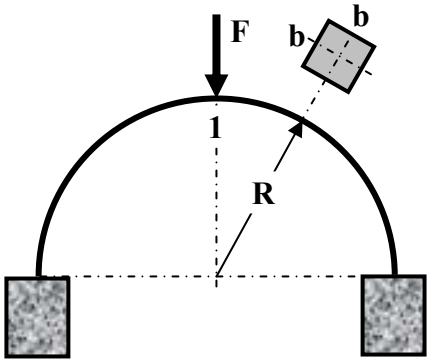


Fig.8.3-19

8.3-20

Pentru zaua din Fig.8.3-20 se cere:

a) forța capabilă pentru σ_a = 180 MPa

b) diagrama de variație a tensiunii normale σ din secțiunea periculoasă.

Se cunosc: R = 80 mm, d = 20 mm.

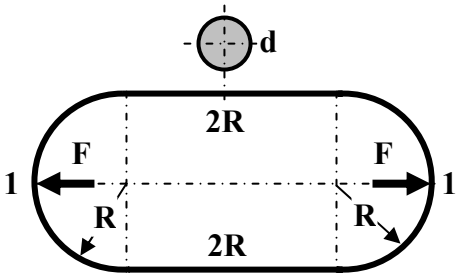


Fig.8.3-20

8.4 CALCULUL LA FLAMBAJ AL BARELOR DREPTE ZVELTE SOLICITATE LA COMPRESIUNE

8.4-1

Un stâlp din fontă este solicitat la compresiune de către forța F. Considerând stâlpul de lungime a = 3 m şi fiind liber la un capăt şi încastrat la celălalt, se cere să se determine valoarea forței de compresiune la care acesta îşi pierde stabilitatea. Calculul se va face în următoarele ipoteze:

a) stâlpul are secțiunea inelară cu d = 60 mm şi D = 100 mm
b) stâlpul area secțiunea circulară plină cu diametrul d = 60 mm
c) stâlpul area secțiunea circulară plină cu diametrul d = 100 mm.

Se cunosc: $E = 1{,}2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 80$, $\sigma_{cr} = 776 - 12\cdot\lambda - 0{,}053\cdot\lambda^2$.

8.4-2

Să se verifice la flambaj un stâlp din oțel de secțiune circulară cu diametrul d = 120 mm şi lungime a = 3 m, solicitat de o forță de compresiune F = 160 kN. Stâlpul este înțepenit la un capăt şi liber la celălalt.

Se cunosc: $E = 2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\cdot\lambda$, $c_{af} = 3$.

8.4-3

Un stâlp din oțel având secțiunea inelară cu D = 120 mm şi d = 80 mm este comprimat de o forță F = 400 kN. Stâlpul are lungimea a = 5 m şi este încastrat la ambele capete. Să se verifice stâlpul la flambaj.

Se cunosc: $E = 2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\cdot\lambda$, $c_{af} = 3$.

8.4-4

Să se determine sarcina de compresiune ce poate solicita un stâlp din oțel executat din profil **I40** de lungime a = 5 m, încastrat la un capăt şi articulat la celălalt.

Se cunosc: $E = 2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\cdot\lambda$, A = 118 cm^2, $I_{min} = 1.160\ cm^4$, $c_{af} = 3$.

8.4-5

Să se determine forța maximă de compresiune pe care o poate suporta un stâlp din lemn de secțiune dreptunghiulară cu dimensiunile 100 x 120 mm x mm, având lungimea a = 4 m. Se vor considera două cazuri de rezemare:

a) încastrat la un capăt şi liber la celălalt
b) încastrat la ambele capete
c) Să se precizeze care din cele două moduri de rezemare este mai avantajos.

Se cunosc: $E = 10^4$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 28{,}7 - 0{,}19\cdot\lambda$, $c_{af} = 5$.

8.4-6

Şurubul conducător al unui strung, articulat la un capăt şi încastrat la celălalt (Fig.8.4-4) este solicitat la compresiune de către forța axială F = 16 kN.

Să se dimensioneze şurubul (diametrul interior d = ?), cunoscând: $E = 2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\cdot\lambda$, $c_{af} = 3{,}5$.

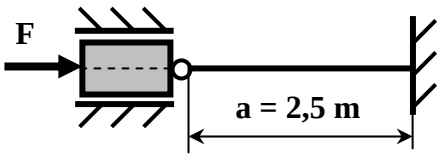


Fig.8.4-4

8.4-7

Să se dimensioneze un stâlp din oțel de lungime a = 6 m, încastrat la un capăt şi liber la celălalt, ştiind că este solicitat la compresiune de o forță axială F = 200 kN. Se consideră două situații:

a) stâlpul are secțiune circulară cu diametrul d

b) stâlpul are secțiune patrată cu latura b.

Se cunosc: $E = 2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\cdot\lambda$, $c_{af} = 3$.

8.4-8

O bară din oțel de secțiune circulară cu diametrul d = 100 mm şi lungime a = 4 m (Fig.8.4-8) este folosită la construcția unei platforme. Considerând bara articulată la ambele capete, să se determine:

a) forța critică de flambaj

b) forța axială capabilă.

Se cunosc: $E = 2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\cdot\lambda$, $c_{af} = 5$.

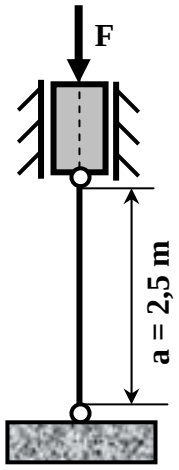


Fig.8.4-8

8.4-9

O bară din oțel de diametru d = 80 mm, încastrată la ambele capete (Fig.8.4-9) este montată la temperatura $T_1 = 20^0$ C. Să se verifice bara la flambaj dacă temperatura barei devine $T_2 = 100^0$ C.

Se cunosc: $E = 2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\cdot\lambda$, $c_{af} = 6$, $\alpha = 12{,}5\cdot10^{-6}$ grad^{-1}.

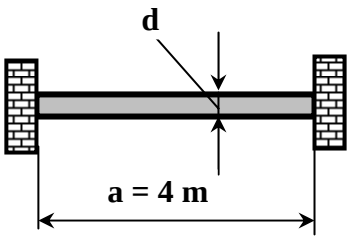


Fig.8.4-9

8.4-10

Fie bara de oțel de secțiune circulară cu diametrul d = 80 mm, rezemată în patru moduri (Fig.8.4-10).

a) Să se determine forța critică de flambaj pentru fiecare mod de rezemare
b) Care variantă de rezemare din cele prezentate este mai avantajoasă în practică ?

Se cunosc: $E = 2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\cdot\lambda$, a = 3 m.

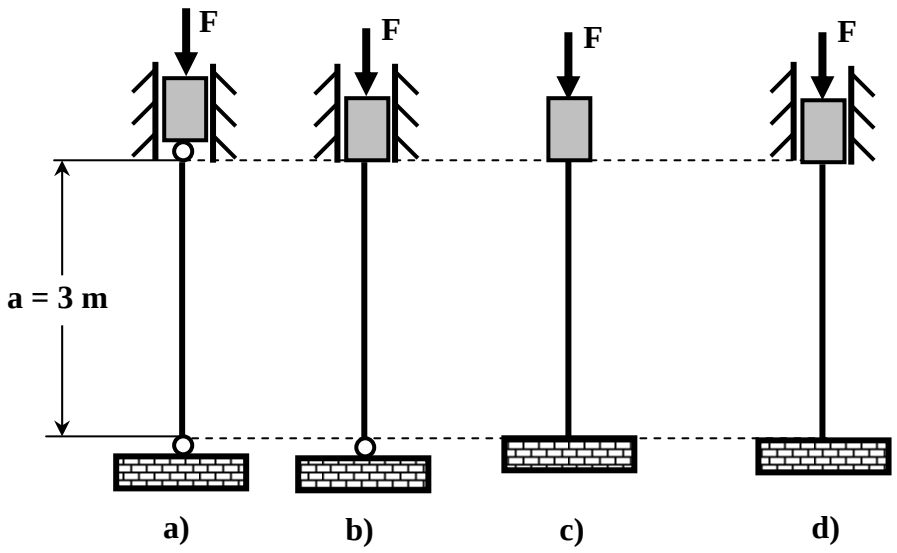


Fig.8.4-10

8.4-11

Pentru sistemul de bare articulate din Fig.8.4-11 se cere să se determine sarcina capabilă (F = ?).

Se cunosc: $E = 2\cdot10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14\cdot\lambda$, $c_{af} = 3$.

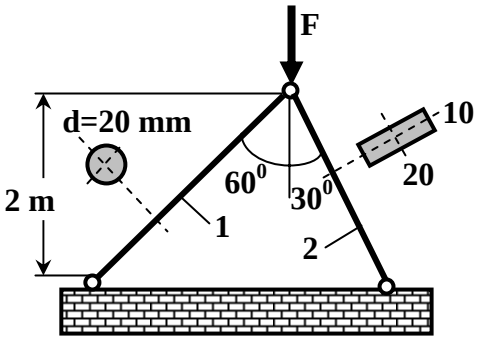


Fig.8.4-11

8.4-12

Să se verifice barele sistemului din Fig.8.4-12. Se cunosc: F = 10 kN, A_1 = 600 mm^2, A_2 = 30 x 20 = 600 mm^2, E = $2\cdot10^5$ MPa, λ_0 = 100, σ_{cr} = 310 – 1,14·λ, c_{af} = 3, σ_a = 150 MPa.

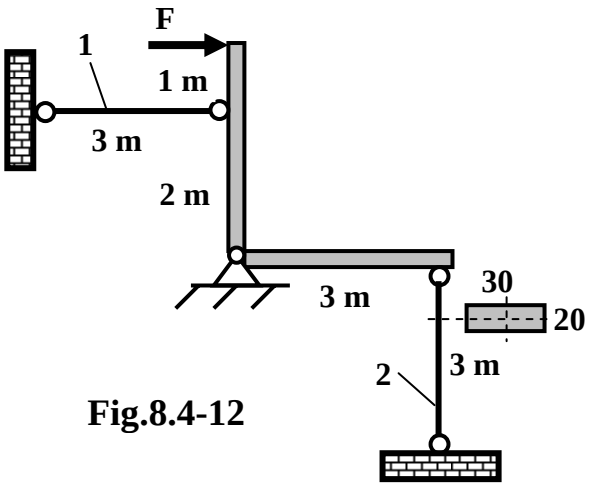


Fig.8.4-12

8.4-13

Să se verifice barele sistemului din Fig.8.4-13.

Se cunosc: F = 20 kN, A_1 = 40 x 40 = 1.600 mm^2, A_2 = 1.000 mm^2, E = $2\cdot10^5$ MPa, λ_0 = 100, σ_{cr} = 310 – 1,14·λ, σ_a = 150 MPa, c_{af} = 4.

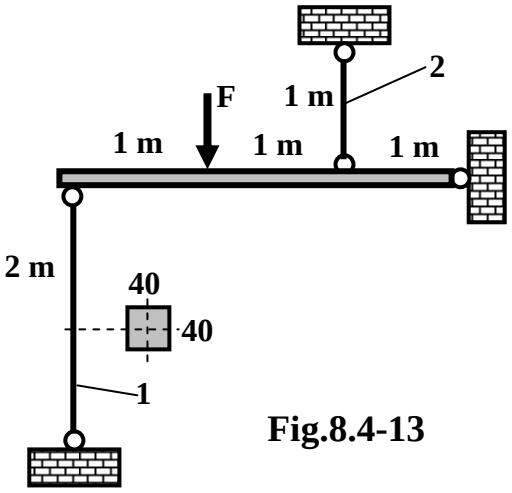


Fig.8.4-13

8.4-14

Să se verifice barele sistemului din Fig.8.4-14. Se cunosc: F = 60 kN, A_1 = 1.200 mm^2, A_2 = 40 x 60 = 2.400 mm^2, E = $2\cdot10^5$ MPa, λ_0 = 100, σ_{cr} = 310 – 1,14·λ, c_{af} = 3, σ_a = 150 MPa.

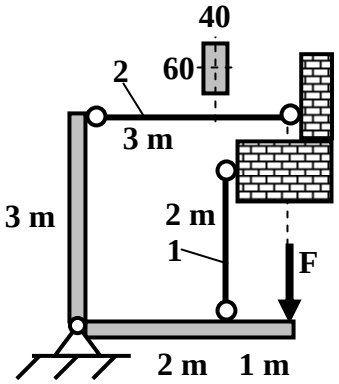


Fig.8.4-14

8.4-15

Pentru sistemul de bare din Fig.8.4-15 se cere valoarea forței capabile cunoscând: A_1 = 3.600 mm^2, d = 60 mm, E = $2\cdot10^5$ MPa, λ_0 = 100, σ_{cr} = 310 – 1,14·λ, c_{af} = 5, σ_a = 150 MPa.

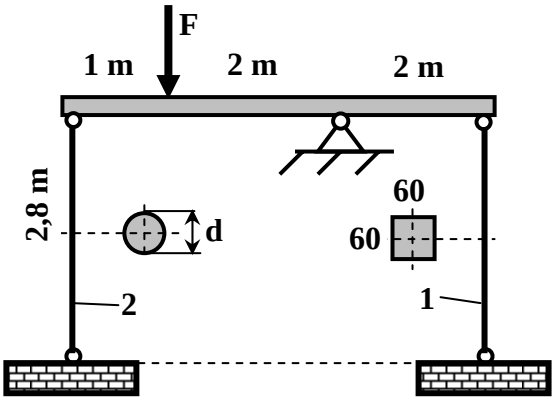


Fig.8.4-15

8.4-16

Să se verifice barele sistemului din Fig.8.4-16 cunoscând: F = 80 kN, d_1 = d_2 = 40 mm, E = $2\cdot10^5$ MPa, λ_0 = 100, σ_{cr} = 310 – 1,14·λ, c_{af} = 3, σ_a = 150 MPa.

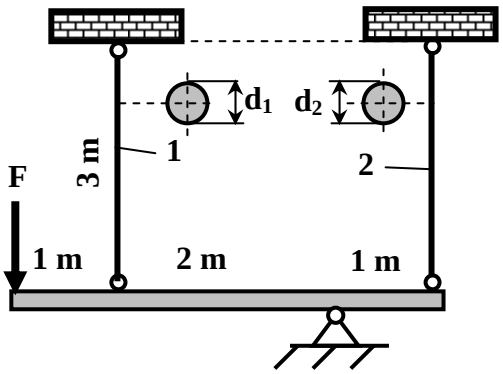


Fig.8.4-16

8.4-17

Pentru sistemul de bare din Fig.8.4-17 se cere valoarea forței capabile cunoscând: d_1 = 20 mm, d_2 = 40 mm, E = $2\cdot10^5$ MPa, λ_0 = 100, σ_{cr} = 310 – 1,14·λ, c_{af} = 3.

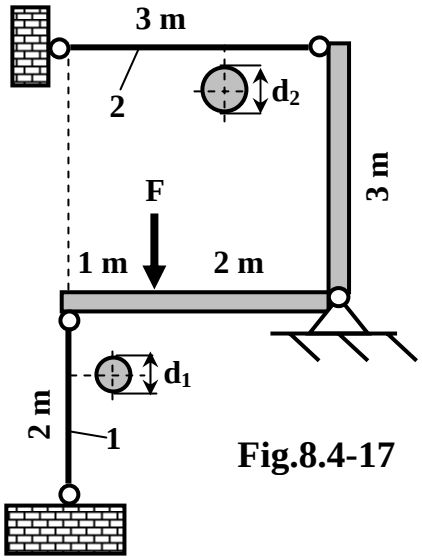


Fig.8.4-17

8.4-18

Să se verifice barele sistemului din Fig.8.4-18 cunoscând: F = 70 MPa, $A_1 = A_2 = 30 \times 30 = 900\ mm^2$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14 \cdot \lambda$, $c_{af} = 3$, $\sigma_a = 150$ MPa.

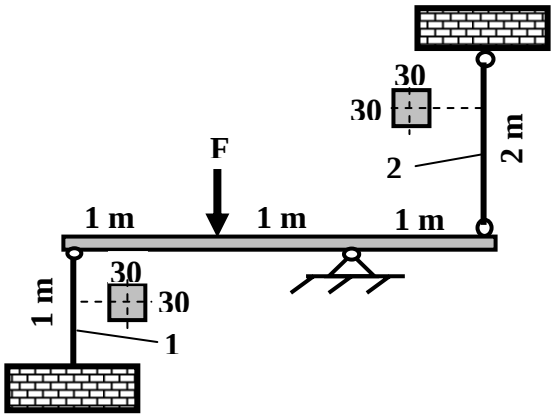


Fig.8.4-18

8.4-19

Pentru sistemul de bare din Fig.8.4-19 se cere valoarea forței capabile astfel încât cele două bare să nu-şi piardă stabilitatea. Se cunosc: $A_1 = A_2 = 50 \times 40 = 2.000\ mm^2$, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14 \cdot \lambda$, $c_{af} = 1$.

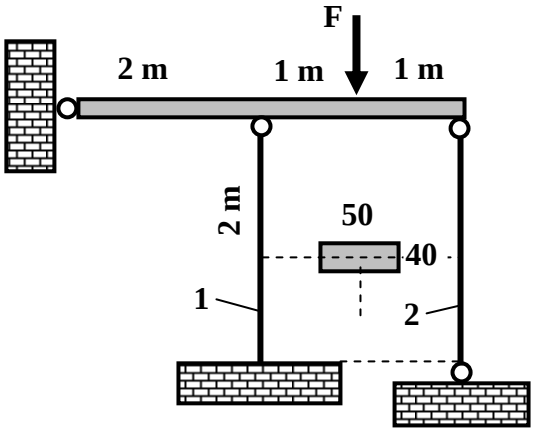


Fig.8.4-19

8.4-20

Să se verifice stabilitatea barelor circulare ale sistemului din Fig.8.4-20. Se cunosc: F = 20 kN, $d_1 = 25$ mm, $d_2 = 20$ mm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\lambda_0 = 100$, $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14 \cdot \lambda$.

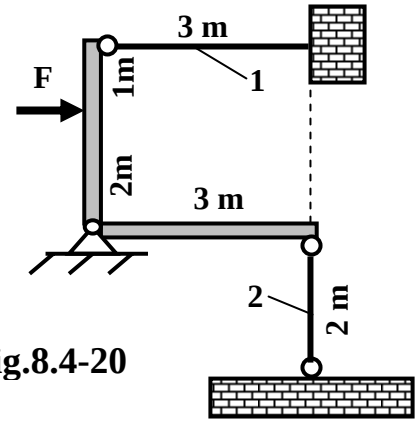


Fig.8.4-20

8.4-21

Să se verifice rezistența şi stabilitatea barelor circulare ale sistemului din Fig.8.4-21. Se cunosc: F = 30 kN, d_1 = 40 mm, d_2 = 20 mm, E = $2\cdot10^5$ MPa, λ_0 = 100, σ_{cr} = 310 – 1,14·λ, σ_a = 150 MPa.

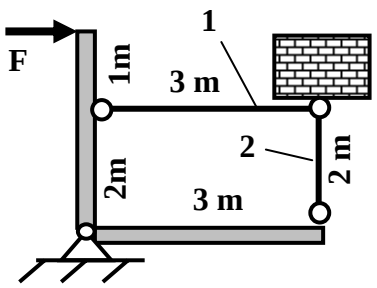


Fig.8.4-21

8.4-22

Să se verifice rezistența şi stabilitatea barelor circulare ale sistemului din Fig.8.4-21. Se cunosc: F = 20 kN, d_1 = d_2 = 30 mm, E = $2\cdot10^5$ MPa, λ_0 = 100, σ_{cr} = 310 – 1,14·λ, σ_a = 150 MPa, c_{af} = 2,5 .

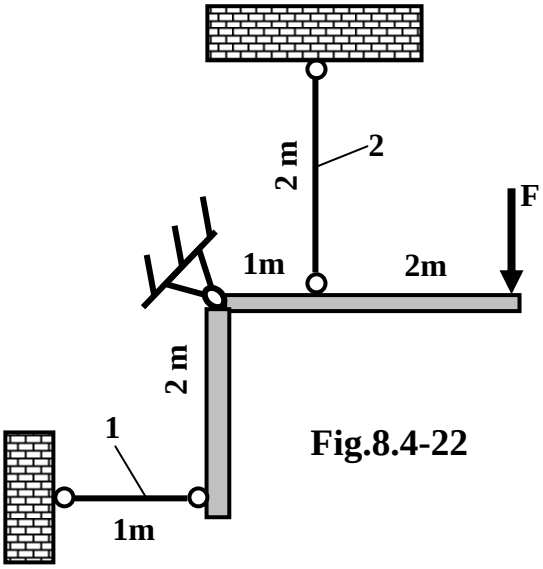


Fig.8.4-22

8.5 CALCULUL ELEMENTELOR DE REZISTENȚĂ SOLICITATE PRIN ŞOCURI

8.5-1

Pe platforma orizontală, rigidă, susținută de o bară de secțiune circulară de diametru d, cade o greutate Q de la înălțimea h, ca în Fig.8.5-1.

Se cere:

a) înălțimea maximă de cădere pentru σ_a = 150 MPa

b) deplasarea maximă a secțiunii 1.

Se cunosc: d = 20 mm, Q = 100 daN, a = 1 m, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

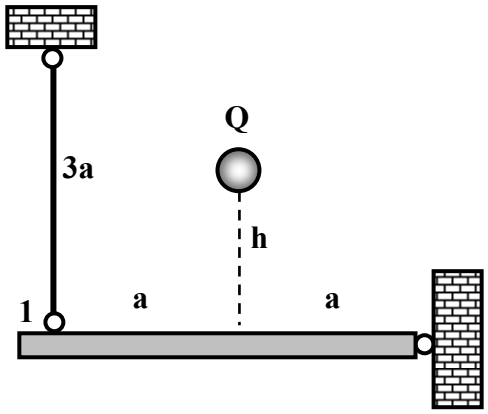


Fig.8.5-1

8.5-2

Să se determine sarcina Q care poate să cadă de la înălțimea h = 100 mm, pe platforma rigidă din Fig.8.5-2, sustinută de două bare de diametru d = 20 mm, astfel încât tensiunea maximă să nu depăşească valoarea σ_{max} = 200 MPa.

Se consideră: E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

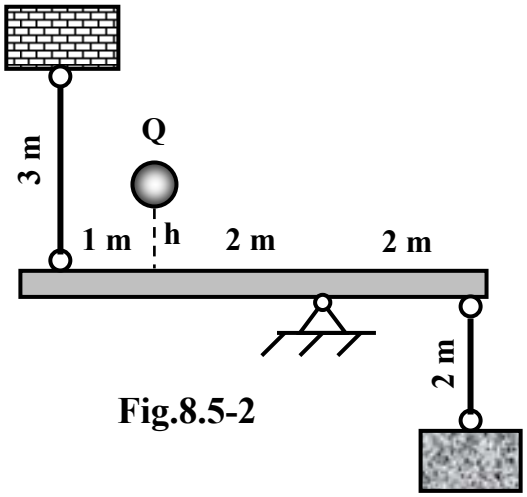


Fig.8.5-2

8.5-3

Pentru sistemul din Fig.8.5-3, se cere:

a) tensiunea maximă din momentul șocului
b) deplasarea maximă a secțiunii de impact.

Se cunosc: d = 20 mm, b = 60 mm, Q = 3 kN, h = 400 mm, a = 0,5 m, E = $2\cdot10^5$ MPa.

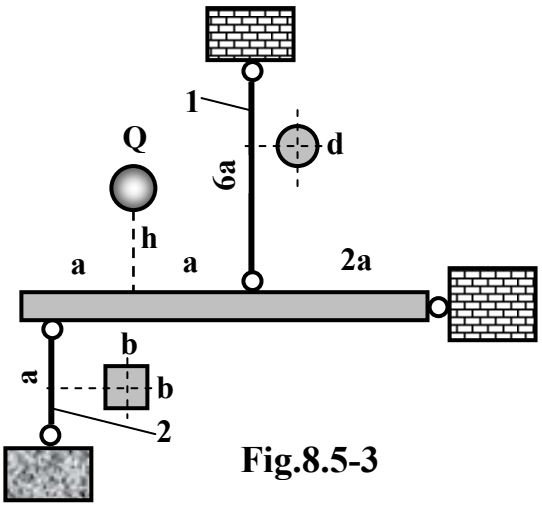


Fig.8.5-3

8.5-4

O platformă rigidă ca cea din Fig.8.5-4 este susținută de un sistem de bare articulate de secțiune circulară, toate având diametrul d = 16 mm. Pe capătul liber al platformei cade o greutate Q = 1 kN de la înălțimea h.

Se cere:

a) înălțimea maximă (h_{max} = ?) de la care poate să cadă greutatea, pentru σ_a = 150 MPa
b) deplasarea secțiunii de impact în momentul șocului.

Se consideră: a = 0,5 m, E = $2\cdot10^5$ MPa.

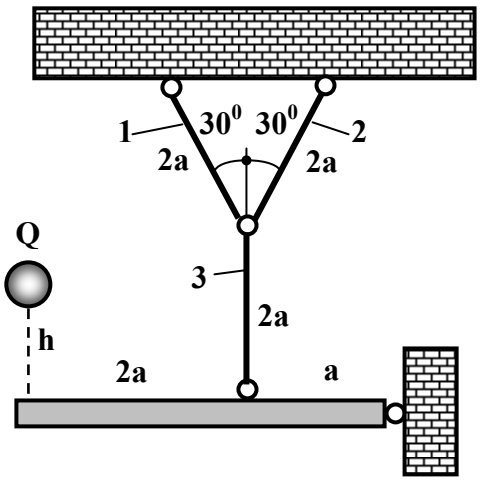


Fig.8.5-4

8.5-5

a) Ce greutate (Q = ?) poate să cadă pe sistemul din Fig.8.5-5 de la înălțimea h = 50 mm, ştiind că barele de susținere ale platformei sunt circulare, toate de diametru d = 20 mm, pentru σ_a = 150 MPa ?

b) Care este deplasarea maximă a secțiunii de impact ?

Se consideră: a = 0,5 m, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

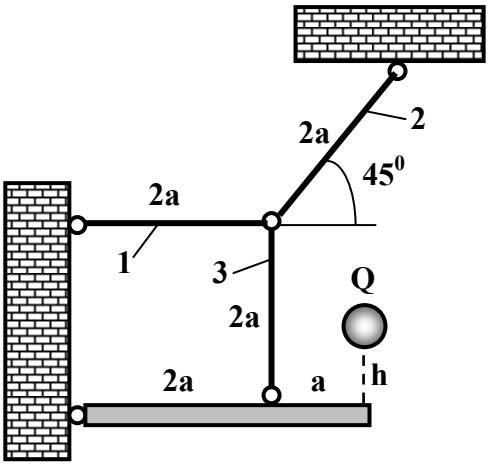


Fig.8.5-5

8.5-6

O colivie este susținută de două cabluri de secțiune circulară, ambele de diametru d = 10 mm, ca în Fig.8.5-6. Ştiind că în colivie cade o greutate Q = 50 N, se cere:

a) înălțimea maximă (h_{max} = ?) de la care poate să cadă greutatea, pentru σ_a = 150 MPa

c) deplasarea secțiunii de implact în momentul şocului.

Se consideră: E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

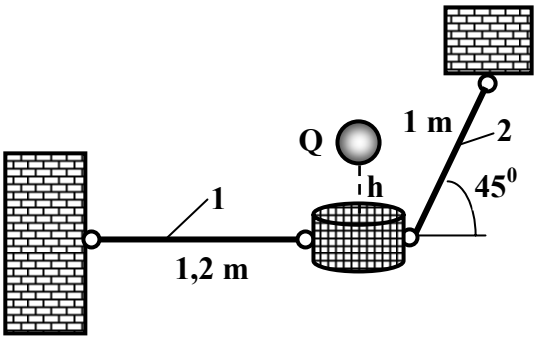


Fig.8.5-6

8.5-7

Pentru sistemul din Fig.8.5-5 pe care cade o greutate Q = 2 kN, se cere:

a) înălțimea maximă (h_{max} = ?) de la care poate să cadă greutatea pentru σ_a = 180 MPa
b) tensiunea maximă din bara 1.

Se cunosc: d = 30 mm, b = 20 mm, a = 1 m, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

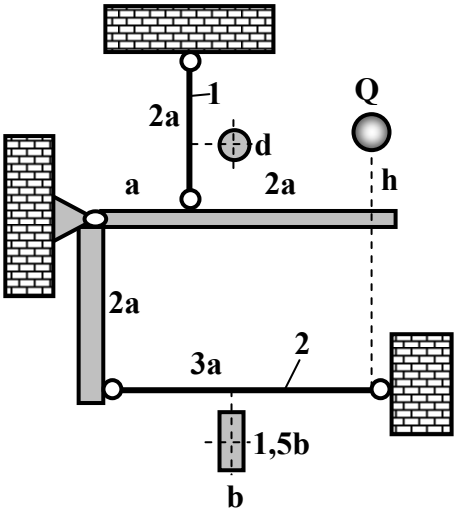


Fig.8.5-7

8.5-8

Pentru bara cotită de secțiune circulară cu diametrul d = 40 mm din Fig.8.5-8, pe capătul căreia cade greutatea Q = 20 daN de la înălțimea h = 200 mm, se cere să se determine deplasarea maximă a secțiunii de impact.

Se cunosc: a = 1 m, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

Se va ține seama şi de efortul axial.

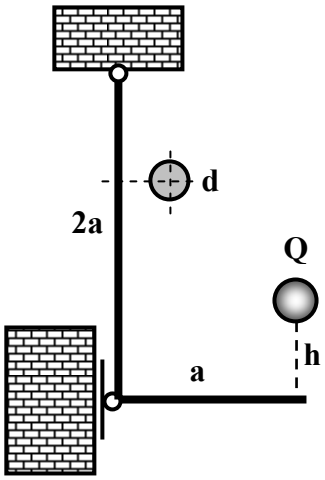


Fig.8.5-8

5.8-9

O grindă de secțiune dreptunghiulară articulată la un capăt, se sprijină cu celălalt capăt pe un stâlp de secțiune patrată, ca în Fig.8.5-9. La mijlocul grinzii cade o greutate Q = 0,8 kN de la înălțimea h = 200 mm. Se cere să se determine valoarea tensiunii în momentul șocului atât în grindă cât și în stâlp.
Se cunosc: a = 2 m, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

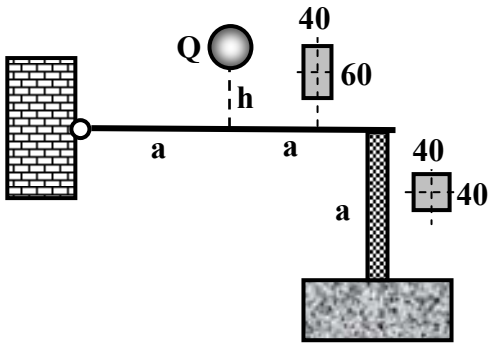


Fig.8.5-9

8.5-10

Să se determine înălțimea maximă (h = ?) de la care poate să cadă greutatea Q = 200 daN pe mijlocul unei grinzi simplu rezemate, dacă aceasta este așezată în două moduri ca în Fig.8.5-10a,b. Să se precizeze care din cele două variante de așezare a grinzii este mai convenabilă.
Se cunosc: b = 20 mm, a = 2 m, σ_a = 150 MPa, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

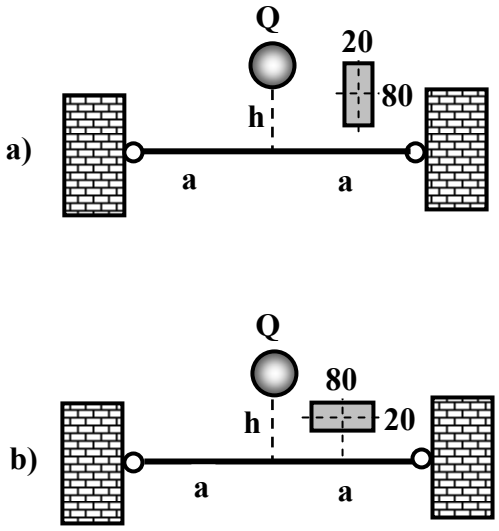


Fig.8.5-10

8.5-11

Pentru cadrul din Fig.8.5-11 pe care cade greutatea Q = 400 daN de la înălțimea h = 25 mm să se cere:

a) tensiunea normală maximă
b) deplasarea secțiunii de impact în momentul șocului.

Se consideră: a = 0,5 m, E = $2 \cdot 10^5$ MPa. Se neglijează efortul axial.

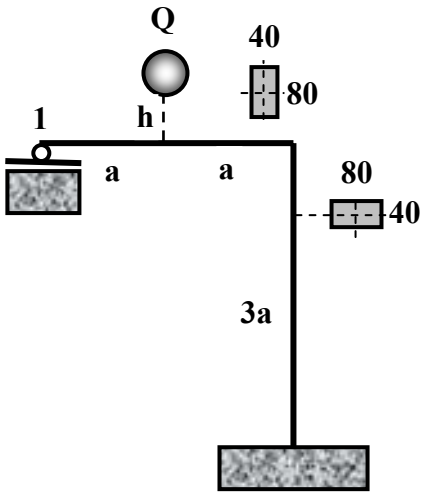


Fig.8.5-11

8.5-12

Să se calculeze înălțimea maximă de la care poate să cadă greutatea Q = 10 daN pe bara de secțiune dreptunghiulară din Fig.8.5-12.

Se cunosc: a = 0,5 m, σ_a = 160 MPa, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

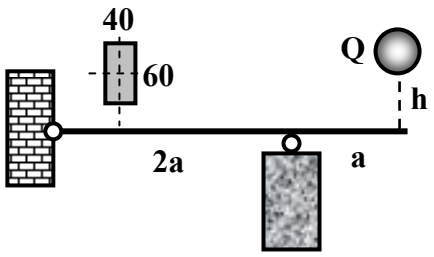


Fig.8.5-12

8.5-13

Care este înălțimea maximă de care poate să cadă greutatea Q = 0,5 kN pe bara cotită de secțiune circulară, din Fig.8.5-13? Dar deplasarea maximă a secțiunii de impact ? Se cunosc: a = 300 mm, d = 100 mm, σ_a = 150 MPa, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

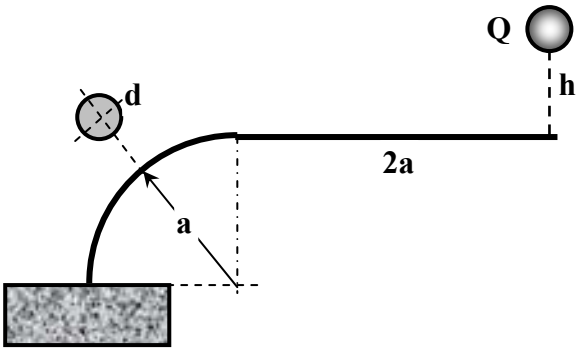


Fig.8.5-13

8.5-14

Pentru cadrul din Fig.8.5-14 având secțiunea un profil **I20** și pe care cade greutatea Q = 0,8 kN, se cere:

a) înălțimea maximă de la care poate să cadă greutatea Q astfel încât tensiunea normală să nu depășească σ_a = 150 MPa

b) deplasarea maximă a secțiunii în care are loc impactul.

Se cunosc: a = 1 m, I_z = 2.140 cm^4, W_z = 214 cm^3, E = $2 \cdot 10^5$ MPa.

Se va neglija efectul efortului axial.

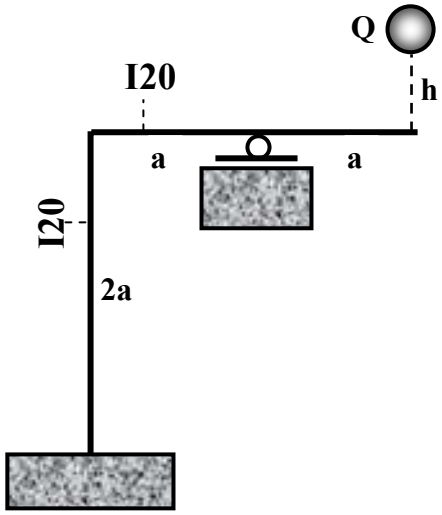


Fig.8.5-14

8.5-15

Cadrul din Fig.8.5-15 este lovit în secțiunea B de greutatea Q = 280 daN cu viteza v = 1,4 m/s. Cadrul este din oțel de secțiune patrată cu latura b = 82 mm.

Se cere:

a) tensiunea normală maximă din cadru
b) rotirea maximă a secțiunii de impact.

Se cunosc: g = 9,8 m/s^2, E = 2,1·10^5 MPa.

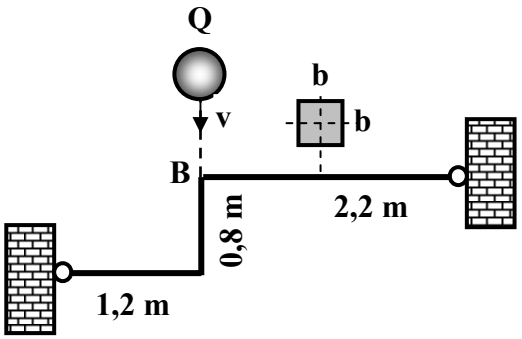


Fig.8.5-15

8.5-16

Pe capătul liber al grinzii de secțiune dreptunghiulară şi care se sprijină pe un arc ca în Fig.8.5-16, cade o greutate Q = 100 daN de la înălțimea h = 200 mm. Cunoscând raza medie de înfăşurare a arcului R_m = 60 mm, diametrul sârmei arcului d = 20 mm, numărul de spire n = 10 şi caracteristicile mecanice ale materialelor celor două elemente, E_{gr} = 2·10^5 MPa, G_{arc} = 8·10^5 MPa, se cere să se determine tensiunea maximă din grindă în momentul impactului.

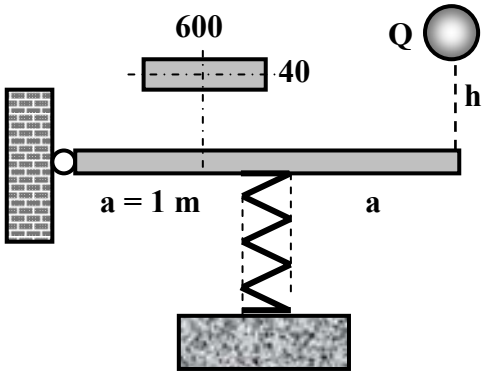


Fig.8.5-16

8.5-17

Să se determine tensiunea maximă care se produce într-o grindă executată din profil **I20** simplu rezemată la ambele capete pe mijlocul căreia se aplică brusc o sarcină Q = 12 kN.

Se cunosc: a = 3 m, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $I_z = 2.140$ cm^4, $W_z = 214$ cm^3.

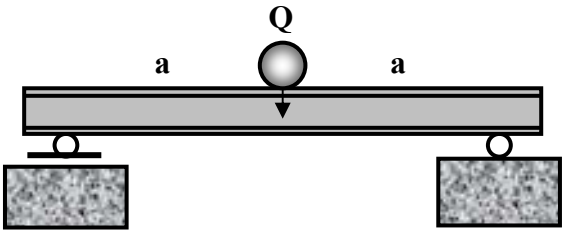


Fig.8.5-17

8.5-18

Un ciocan de forjă având greutatea Q = 5 kN cade pe o nicovală din fontă de la înălțimea h = 500 mm (Fig.8.5-18).

Se cere:

a) să se determine tensiunea din corpul nicovalei din momentul impactului, ştiind că aceasta este de secțiune patrată cu latura b = 400 mm, lungimea a = 500 mm, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa

b) deplasarea maximă a secțiunii de impact.

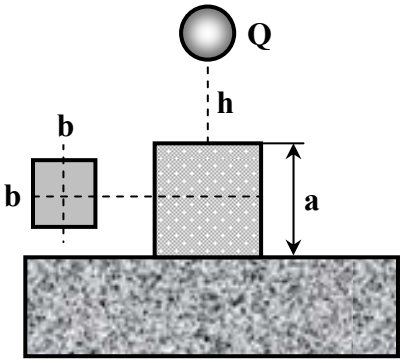


Fig.8.5-18

8.5-19

a) Să se determine tensiunea maximă care se produce într-o grindă executată din profil **I14** încastrată la ambele capete pe mijlocul căreia cade o sarcină Q = 400 daN de la înălțimea h = 100 mm (Fig.8.5-19).

b) Să se determine deplasarea maximă a secâiunii de impact.

Se cunosc: a = 1 m, $E = 2\cdot10^5$ MPa, $I_z = 573\ cm^4$, $W_z = 81{,}9\ cm^3$.

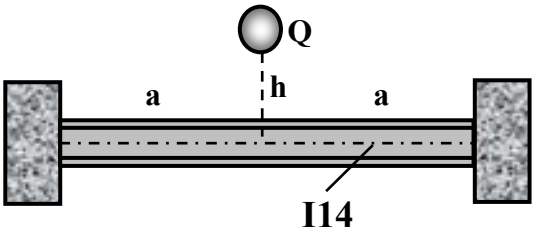


Fig.8.5-19

8.5-20

Pe cadrul de secțiune circulară cu diametrul d = 100 mm din Fig.8.5-20 cade o greutate Q = 200 daN de la înălțimea h. Se cere:

a) înălțimea maximă (h = ?) de la care poate să cadă greutatea Q pentru σ_a = 150 MPa

b) deplasarea maximă a secțiunii de impact.

Se cunosc: a = 1 m, $E = 2\cdot10^5$ MPa

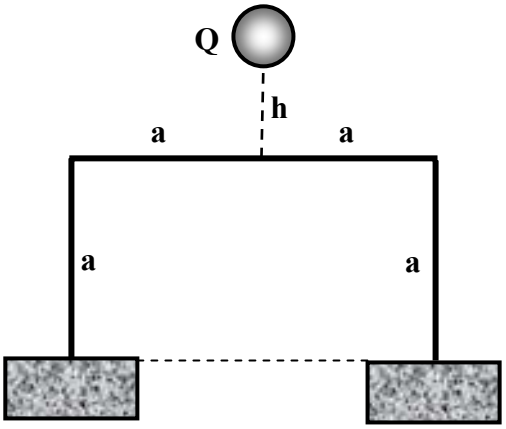


Fig.8.5-20

8.6 CALCULUL LA SOLICITĂRI VARIABILE (OBOSEALĂ)

8.6-1

Un arbore din oțel de secțiune circulară cu diametrul d = 60 mm, este solicitat în secțiunea cu concentrator de cuplurile: $M_{i,max}$ = 2 kN·m, $M_{i,min}$ = -2 kN·m, $M_{t,max}$ = 4 kN·m, $M_{t,min}$ = -4 kN·m. Se cere să se verifice arborele la oboseală, cunoscând: σ_{-1} = 330 MPa, σ_0 = 420 MPa, τ_{-1} = 190 MPa, τ_0 = 220 MPa, K_σ = 1,24; ε_σ = 0,78; $(K_\tau)_D$ = 1,32; γ = 0,8; c_a = 1,5.

8.6-2

Un arbore din oțel de secțiune circulară cu diametrul d = 80 mm, este solicitat în secțiunea cu concentrator de cuplurile: $M_{i,max}$ = 6 kN·m, $M_{i,min}$ = 2 kN·m, $M_{t,max}$ = 5 kN·m, $M_{t,min}$ = 0. Se cere să se calculeze coeficientul de siguranță la oboseală al arborelui, cunoscând: σ_{-1} = 310 MPa, σ_0 = 500 MPa, τ_{-1} = 180 MPa, τ_0 = 250 MPa, $(K_\sigma)_D$ = 1,8; $(K_\tau)_D$ = 2.

8.6-3

Un arbore din oțel de secțiune circulară cu diametrul d = 50 mm, este solicitat în secțiunea cu concentrator de cuplurile: $M_{i,max}$ = 1 kN·m, $M_{i,min}$ = 0, $M_{t,max}$ = 1 kN·m, $M_{t,min}$ = -1 kN·m. Se cere să se calculeze coeficientul de siguranță la oboseală al arborelui, cunoscând: σ_{-1} = 240 MPa, σ_0 = 320 MPa, τ_{-1} = 140 MPa, τ_0 = 170 MPa, K_σ = 1,2; ε_σ = 0,84; K_τ = 1,1; ε_τ = 0,7; γ = 0,94.

8.6-4

Un arbore din oțel de secțiune circulară cu diametrul d = 62 mm, este solicitat în secțiunea cu concentrator după ciclu pulsant, de cuplurile: $M_{i,max}$ = 3 kN·m, $M_{i,min}$ = 0, $M_{t,max}$ = 2 kN·m, $M_{t,min}$ = 0. Se cere să se calculeze coeficientul de siguranță la oboseală al arborelui, cunoscând: σ_{-1} = 280 MPa, σ_0 = 430 MPa, τ_{-1} = 160 MPa, τ_0 = 220 MPa, K_σ = 2; ε_σ = 0,77; K_τ = 1,2; ε_τ = 0,67; γ = 0,93.

8.6-5

Sistemul din Fig.8.6-5 este solicitat de forța F care variază în timp între valorile F_{min} = 0 şi F_{max}. Se cere să se determine valoarea forței maxime (F_{max} = ?) dacă în secțiunea cu concentrator coeficientul de siguranță admis la oboseală este c = 1,6.
Se cunosc: d = 60 mm, D = 72 mm, σ_{-1} = 340 MPa, σ_0 = 500 MPa, τ_{-1} = 200 MPa, τ_0 = 230 MPa, $(K_\sigma)_D$ = 1,4; $(K_\tau)_D$ = 1,8.

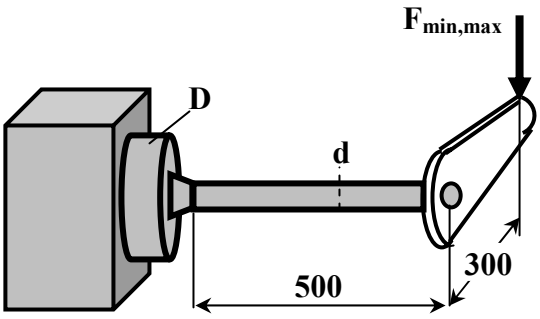


Fig.8.6-5

8.6-6

Arcul din Fig.8.6-6 confecționat dintr-un oțel arc călit este solicitat de o forță a cărei valoare variază în timp între limitele F_{min} = 4 kN, respectiv F_{max} = 10 kN.
Caracteristicile materialului arcului sunt: τ_c = 63 MPa, τ_{-1} = 30 MPa, τ_0 = 40 MPa.

Se cere să se determine coeficientul de siguranță la oboseală al materialului arcului ştiind că acesta este confecționat din sârmă cu diametrul d = 20 mm, iar raza medie de înfăşurare a sârmei fiind R = 60 mm. Factorii de influență ai rezistenței la oboseală sunt: $K_\tau = 1{,}1$; $\varepsilon_\tau = 1$; $\gamma = 0{,}6$.
Obs. Se va neglija efectul forței tăietoare.

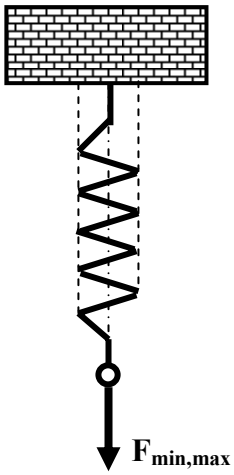


Fig.8.6-6

8.6-7

Arborele din Fig.8.6-7 se roteşte cu turația n = 200 rot/min şi este solicitat de către forța constantă F = 4 kN. Se cere să se determine coeficientul de siguranță la oboseală în secțiunea de trecere de la diametrul d la D. Se cunosc: d = 40 mm, D = 80 mm, a = 200 mm, σ_{-1} = 350 MPa, σ_0 = 620 MPa, $K_\sigma = 1{,}37$; $\varepsilon_\sigma = 0{,}84$; $\gamma = 0{,}88$.

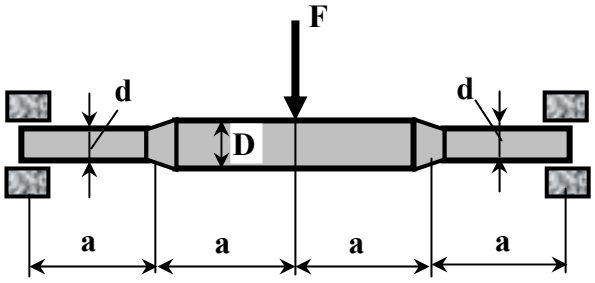


Fig.8.6-7

8.6-8

Bara circulară din Fig.8.6-8 având D = 60 mm este solicitată axial de către o forță F care variază în timp în limitele F_{min} = 10 kN, respectiv F_{max} = 80 kN. Având în vedere că bara prezintă o gaură pentru trecerea unui bulon cu d = 12 mm, se cere să se determine coeficientul de siguranță la oboseală în secțiunea slăbită. Se cunosc: σ_{-1} = 220 MPa, σ_0 = 300 MPa, K_σ = 1,75; ε_σ = 0,98; γ = 0,88.

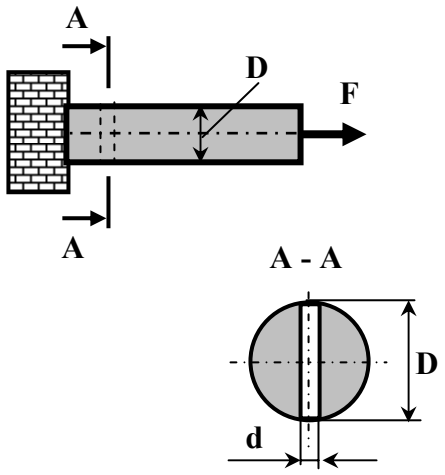


Fig.8.6-8

8.6-9

Osia din Fig.8.6-9 are prevăzut un canal de pană şi este realizată din OL60. Trecerea de la diametrul d = 90 mm la D = 100 mm se face printr-o rază de racordare r = 5 mm. Osia are suprafața finisată prin strunjire. Se cere să se determine coeficientul de siguranță la oboseală în:

a) secțiunea slăbită prin canalul de pană

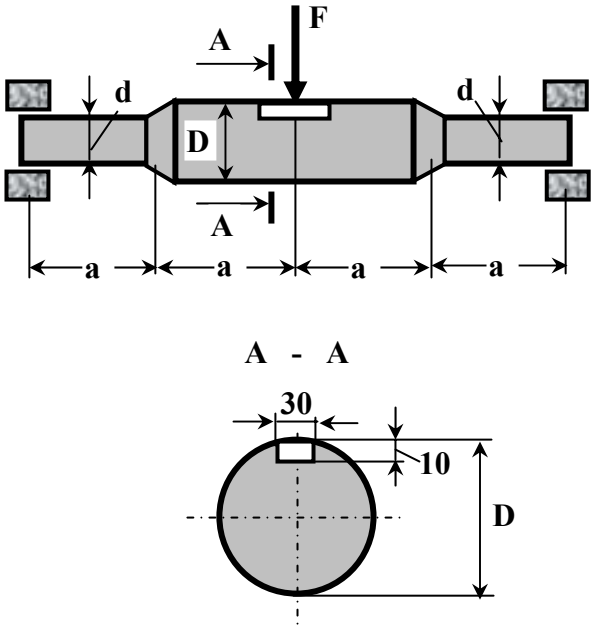


Fig.8.6-9

b) secțiunea de trecere de la d la D.

Se cunosc: σ_{-1} = 280 MPa, σ_0 = 510 MPa, a) K_σ = 1,5; ε_σ = 0,7; γ = 0,9; b) K_σ = 1,6; ε_σ = 0,72; γ = 0,85.

8.6-10

Bara circulară cu secțiune variabilă din Fig.8.6-10 este solicitată alternativ de către forțele F_{min} = 1 kN, respectiv F_{max} = 3 kN.

Cunoscând: a = 300 mm, σ_{-1} = 310 MPa, σ_0 = 520 MPa, τ_{-1} = 180 MPa, τ_0 = 210 MPa, K_σ = 1,5; ε_σ = 0,75; γ = 0,83; K_τ = 1,15; ε_τ = 0,66; γ = 0,83 să se determine coeficientul de siguranță la oboseală al barei circulare.

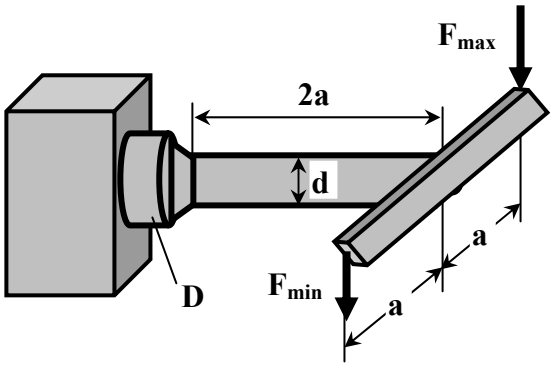


Fig.8.6-10

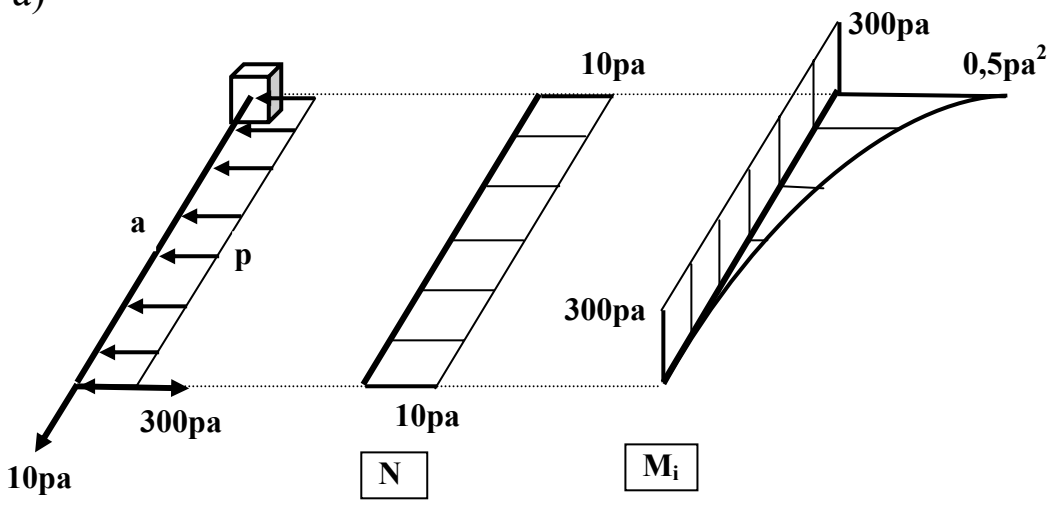
B. RĂSPUNSURI (Rezultate)

8.1 CALCULUL DE REZISTENȚĂ LA ÎNCOVOIERE OBLICĂ ŞI SOLICITĂRI COMPUSE

8.1.1 Încovoierea oblică şi solicitarea compusă de categoria I

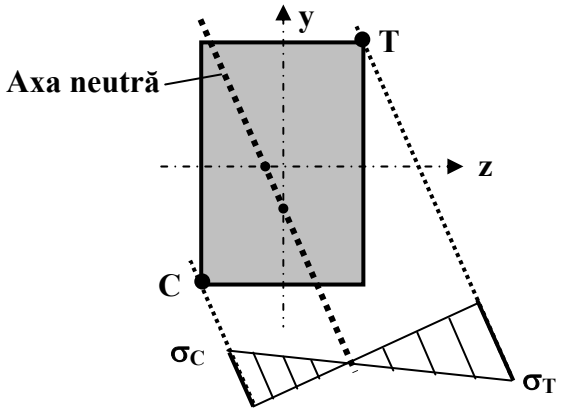
8.1.1-1

a)



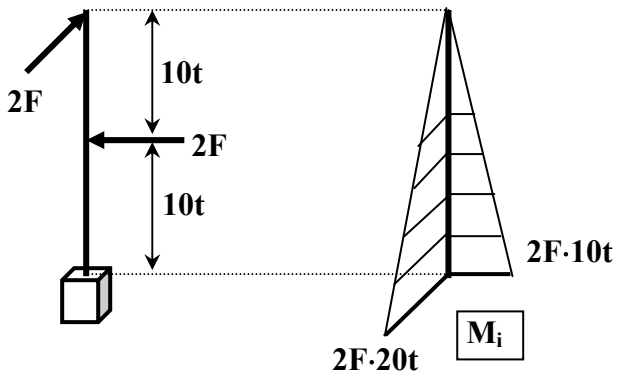
b) $A = 2.400\ mm^2$, $I_z = 72 \cdot 10^4\ mm^4$, $I_y = 32 \cdot 10^4\ mm^4$, $N = 10^4\ p$, $M_{iz} = 3 \cdot 10^5\ p$, $M_{iy} = 5 \cdot 10^5\ p$, $p_{cap} = 3{,}34\ kN/m$

c) $z_0 = -2{,}67\ mm$, $y_0 = -10\ mm$



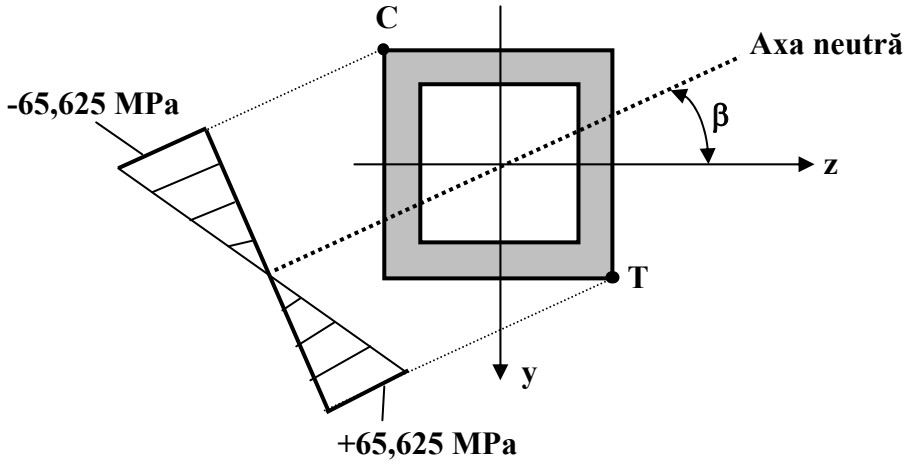
8.1.1-2

a)



b) $I_z = I_y = 20\ t^4$, $\sigma_{max,t} = 6F/t^2 = 65,\ 625$ MPa, $\sigma_{max,c} = -6F/t^2 = -65,\ 625$ MPa

c) $\beta = -26{,}56^0$



8.1.1-3

a)

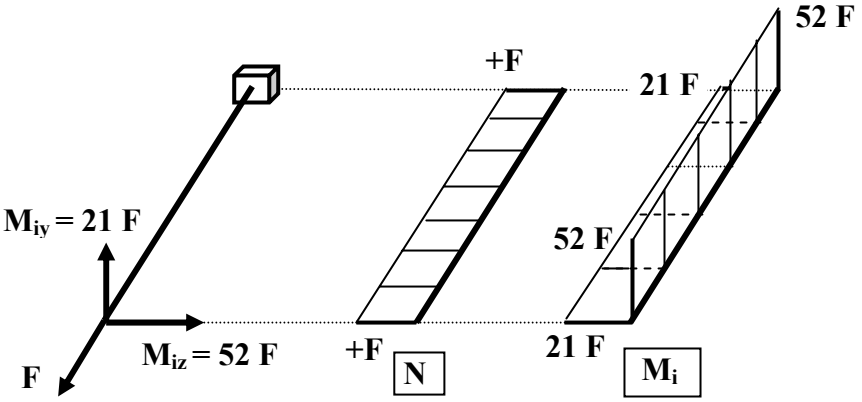
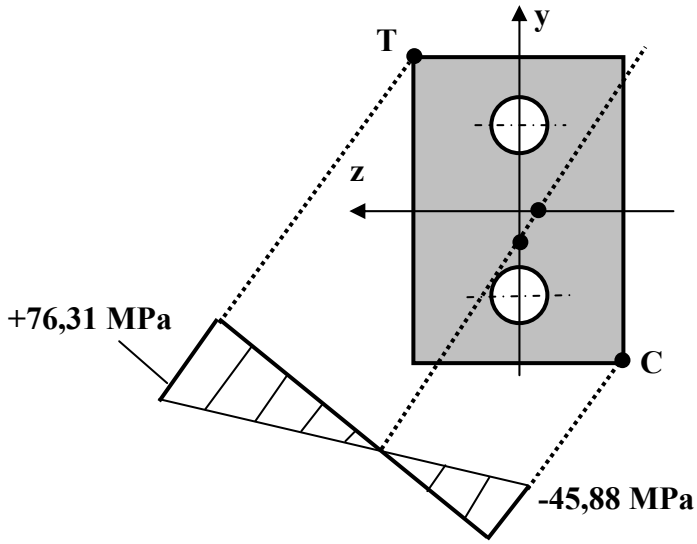


Fig.8.1.1-3

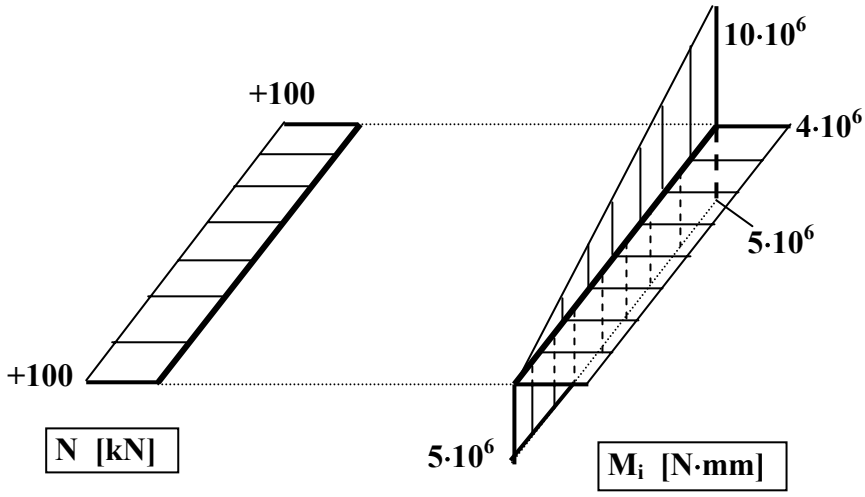
b) N = +F = 86 kN, M_{iz} = 52F, M_{iy} = 21F, A = $5{,}652\cdot10^3$ mm^2, I_z = $7{,}5489\cdot10^6$ mm^4, I_y = $2{,}2978\cdot10^6$ mm^4, σ_{max} = +76,31 MPa < σ_a

c) y_0 = -25,68 mm, z_0 = -19,36 mm



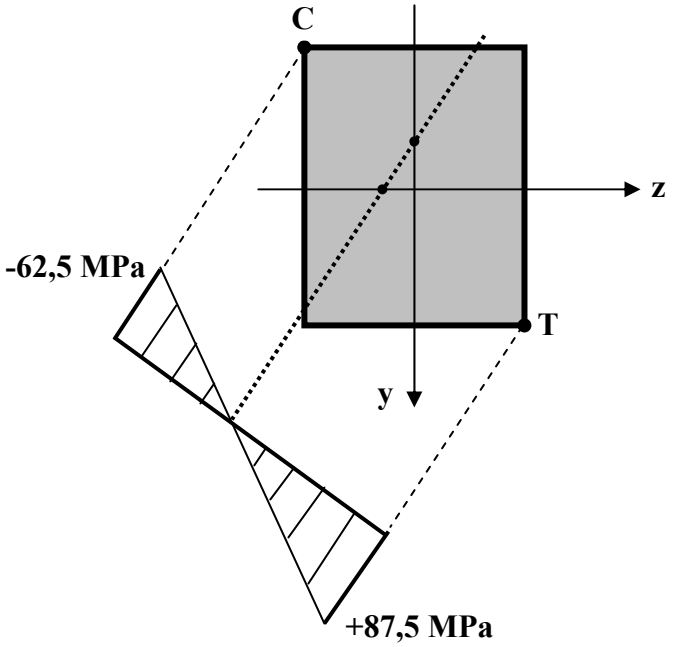
8.1.1-4

a)



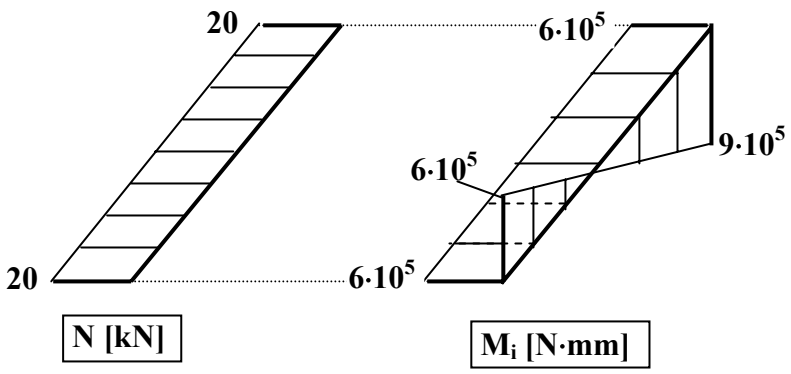
b) A = 8.000 mm^2, I_z = $6{,}67\cdot10^6$ mm^4, I_y = $4{,}267\cdot10^6$ mm^4, N = 100 kN, $M_{i,z}$ = $5\cdot10^6$ N·mm, $M_{i,y}$ = $4\cdot10^6$ N·mm, $\sigma_{max,t}$ = +87,5 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -62,5 MPa

c) z_0 = - 13,33 mm, y_0 = -16,67 mm



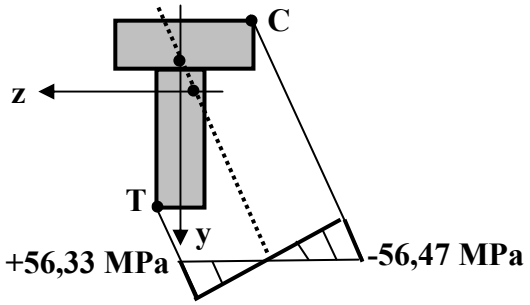
8.1.1-5

a)



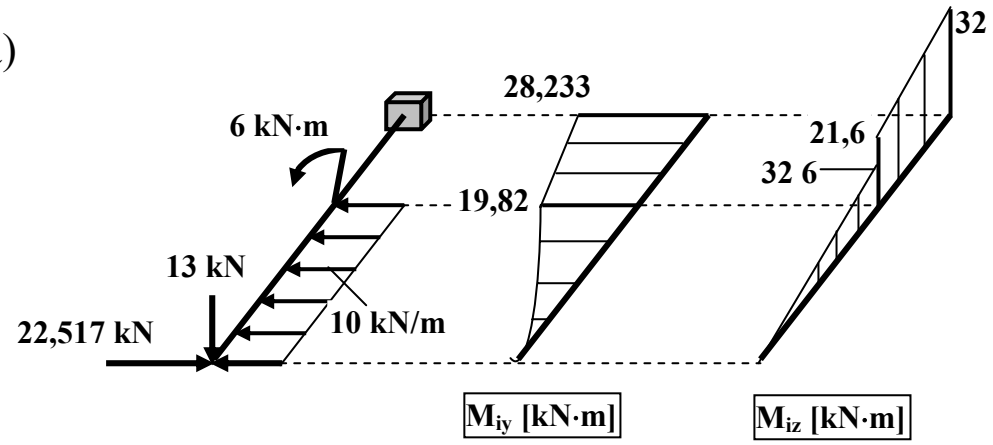
b) y_G =50 mm, A = 2.400 mm^2, I_z = 136·10^4 mm^4, I_y = 40·10^4 mm^4, N = 20 kN, M_{iz} = 9·10^5 N·mm, M_{iy} = 6·10^5 N·mm, $\sigma_{max,t}$ = +56,33 MPa > σ_{at} (nu se verifică condiția de rezistență la tracțiune), $\sigma_{max,c}$ = -56,47 MPa < σ_{ac}

c) z_0 = -5,55 mm, y_0 = -12,6 mm



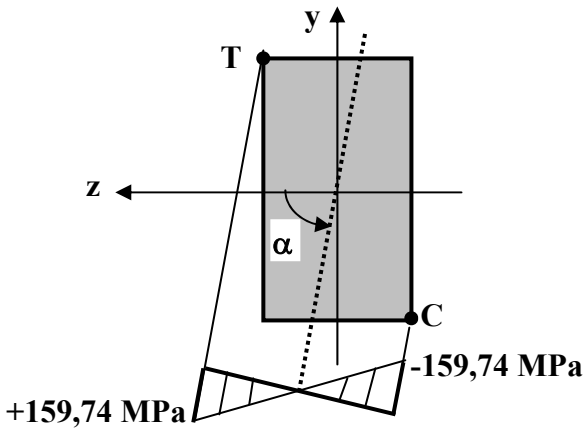
8.1.1-6

a)



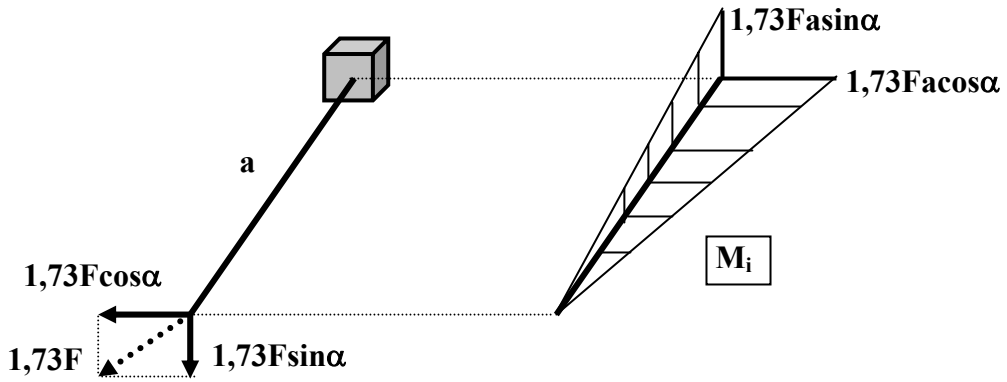
b) $A = 2{,}8\ b^2$, $I_z = 1{,}8293\ b^4$, $I_y = 0{,}233\ b^4$, $M_{iz} = 32$ kN·m, $M_{iy} = 28{,}233$ kN·m, b = 81 mm, h = 227 mm

c) $\alpha = -81{,}79^0$



8.1.1-7

a)

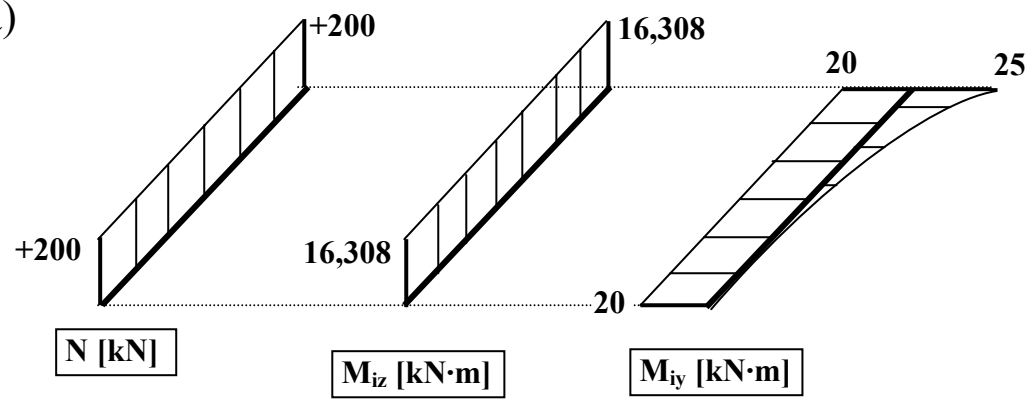


b) y_G = 35 mm, z_T = 20 mm, y_T = 25 mm, z_C = 20 mm, y_C = 5 mm, z_B = 10 mm, y_B = 35 mm, M_{iz} = 1,73Fa sinα, M_{iy} = 1,73Fa cosα, $\sigma_T = +1.344{,}45\cdot10^{-4}\cdot F$, $\sigma_C = -1.081{,}35\cdot10^{-4}\cdot F$, $\sigma_B = +869{,}55\cdot10^{-4}\cdot F$

c) $\beta = -81{,}14^0$, F_{cap} = 1,116 kN

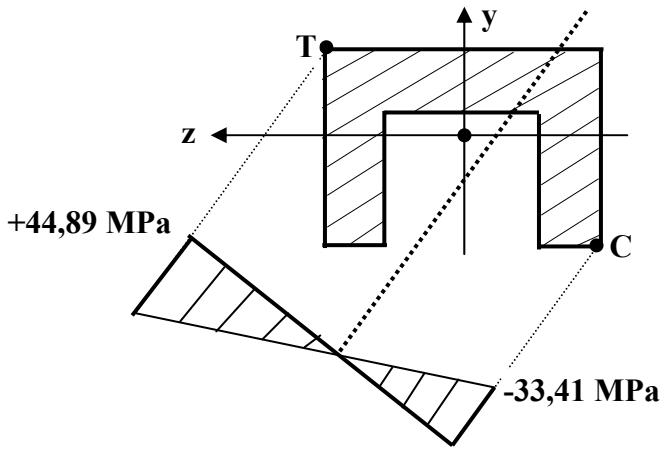
8,1.1-8

a)



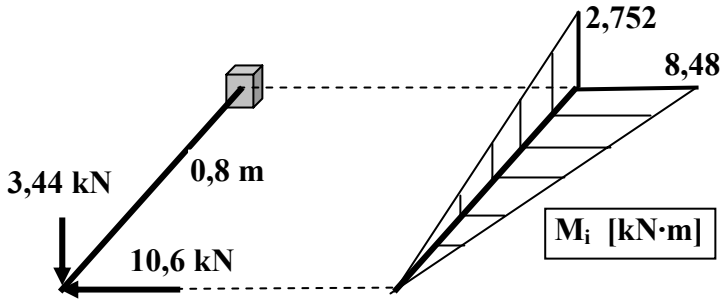
b) y_G = 118,46 mm, A = $2{,}08\cdot10^4$ mm^2, $I_z = 7{,}76\cdot10^7$ mm^4, $I_y = 11{,}029\cdot10^7$ mm^4, $\sigma_{max,t}$ =+ 44,89 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -33,41 MPa

c)



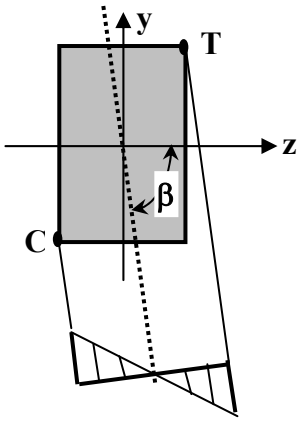
8.1.1-9

a)



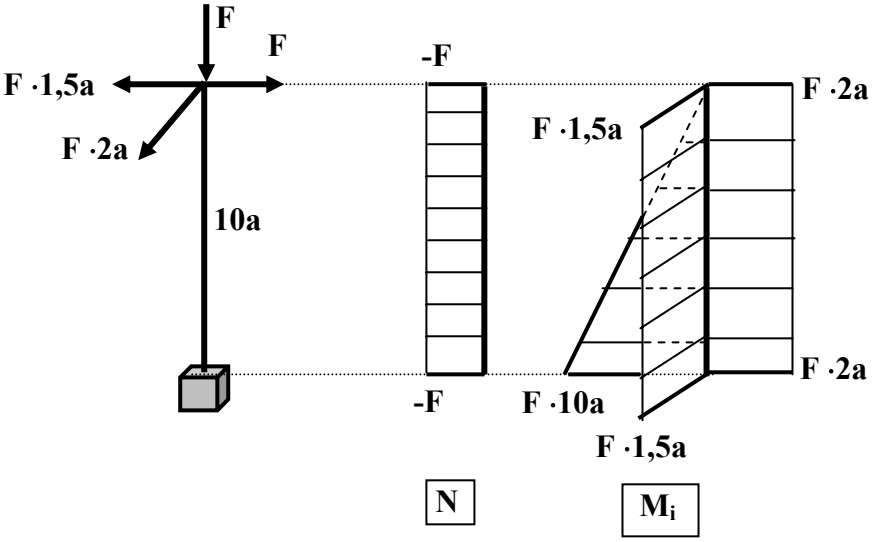
b) $A = 2t^2$, $I_z = 0{,}67t^4$, $I_y = 0{,}167t^4$, $t_{nec,t} = 126$ mm, $t_{nec,c} = 79$ mm $\Rightarrow t = 126$ mm

c) $\beta = -85{,}36^0$



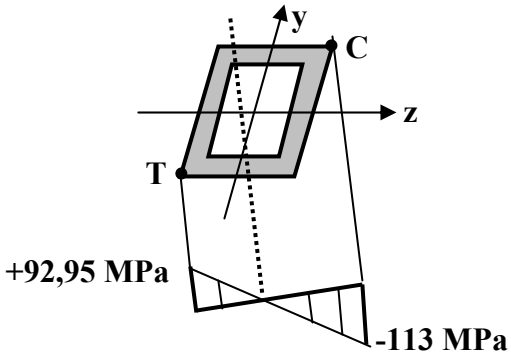
8.1.1-10

a)



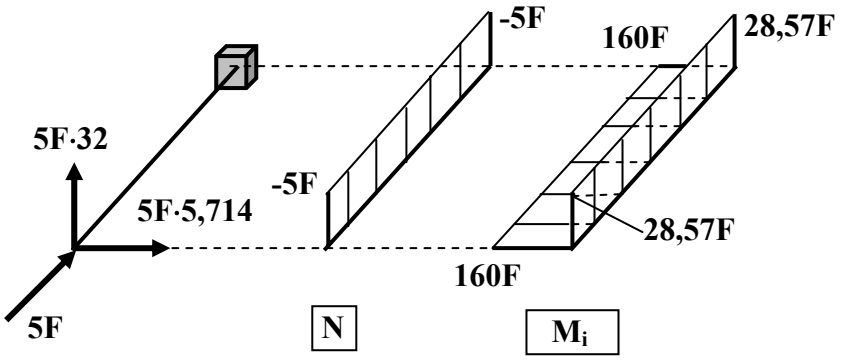
b) $A = 6t^2$, $I_z = 7t^4$, $I_y = 11{,}5t^4$, $F_{cap} = F_{cap,c} = 216{,}452$ kN

c) $z_0 = -14{,}375$ mm, $y_0 = -46{,}67$ mm



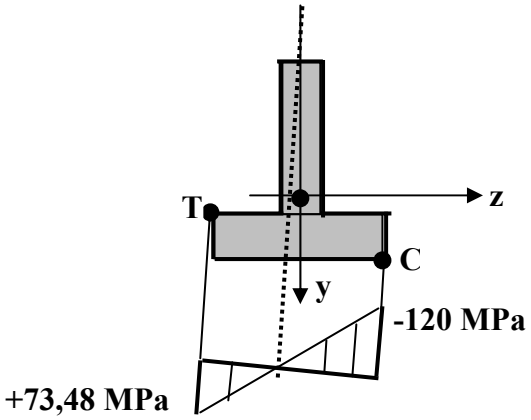
8.1.1-11

a) y_G = 21,714 mm, y_F = 5,514 mm, z_F = 32 mm



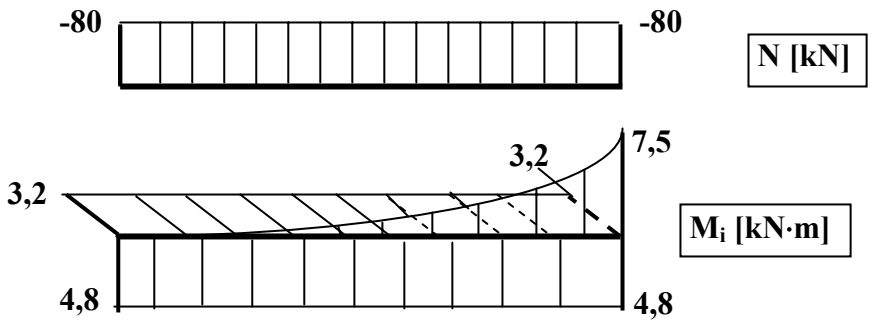
b) A = 1.792 mm^2, I_z = 618.691 mm^4, I_y = 365.909 mm^4, N = -5F, M_{iz} = 28,57 F, M_{iy} = 160 F, F_{cap} = 6,748 kN

c) z_0 = -6,38 mm, y_0 = -60,42 mm



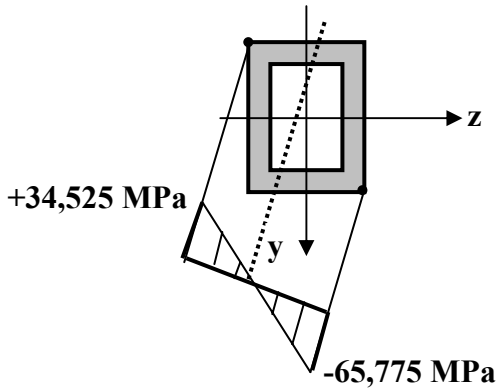
8.1.1-12

a)



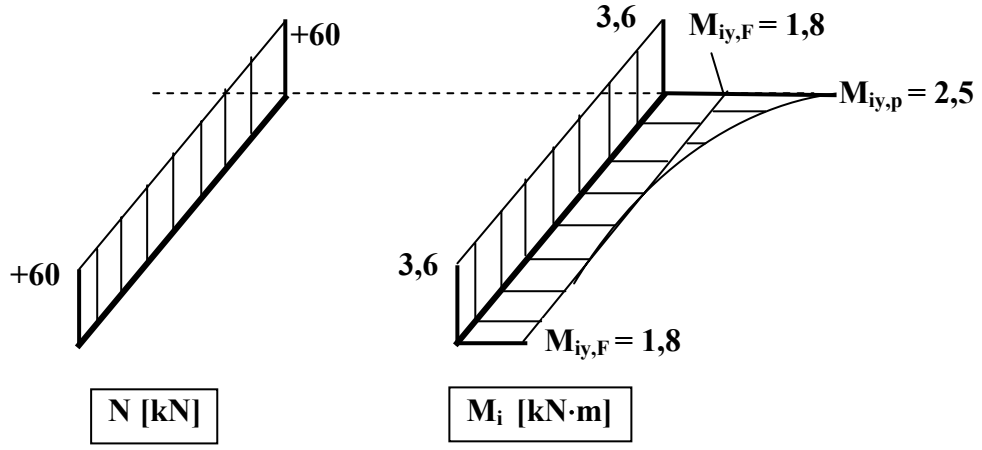
b) $A = 5.120\ mm^2$, $I_z = 913,066 \cdot 10^4\ mm^4$, $I_y = 394,9226 \cdot 10^4\ mm^4$, $N = -80\ kN$, $M_{iz} = 8,8\ kN \cdot m$, $M_{iy} = 3,2\ kN \cdot m$, $\sigma_{max,t} = +34,525$ MPa, $\sigma_{max,c} = -65,775$ MPa

c) $z_0 = -19,28$ mm, $y_0 = -53,84$ mm



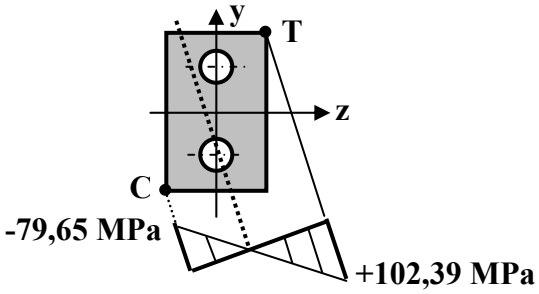
8.1.1-13

a)



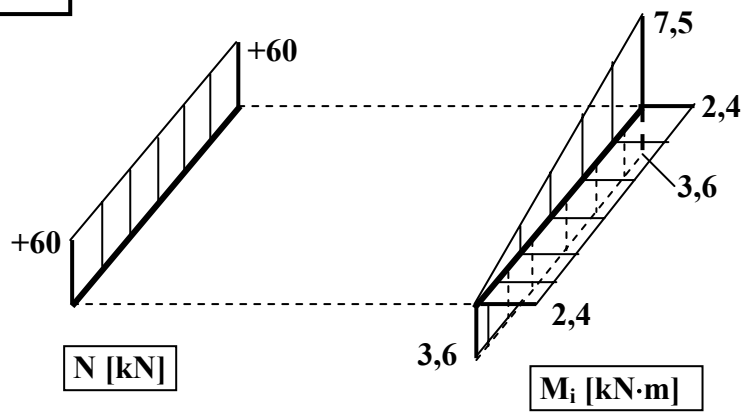
b) $A = 5.275,7\ mm^2$, $I_z = 801,24765 \cdot 10^4\ mm^4$, $I_y = 201,26765 \cdot 10^4\ mm^4$, $N = 60\ kN$, $M_{iz} = 3,6\ kN \cdot m$, , $M_{iy} = 4,3\ kN \cdot m$

c) $z_0 = -5,32$ mm, $y_0 = -25,32$ mm, $\sigma_{max,t} = +102,39$ MPa, $\sigma_{max,c} = -79,65$ MPa



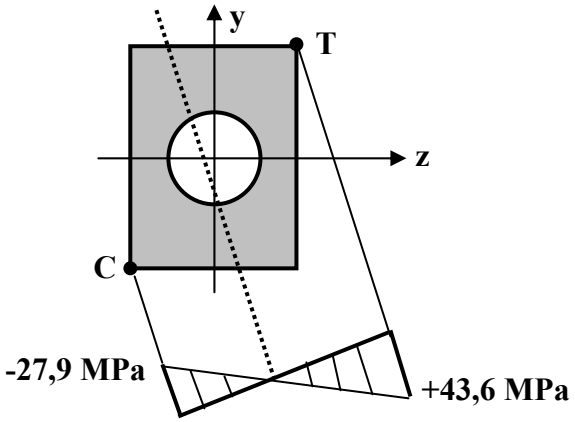
8.1.1-14

a)



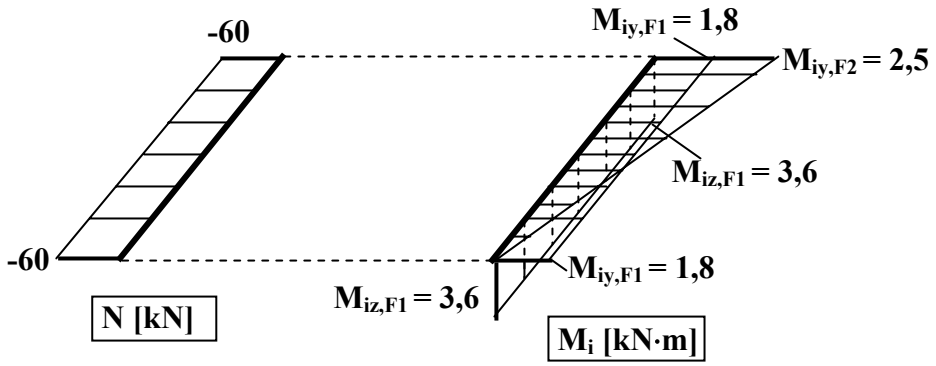
b) A = 7.636,5 mm^2, I_z = 1.121,32·10^4 mm^4, I_y = 481,32·10^4 mm^4, N = 60 kN, M_{iz} = 3,9 kN·m, M_{iy} = 2,4 kN·m, $\sigma_{max,t}$ = +43,6 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -27,9 MPa

c) z_0 = - 15,77 mm, y_0 = -22,64 mm



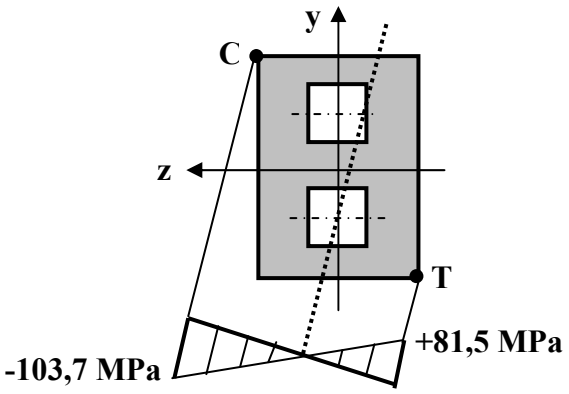
8.1.1-15

a)



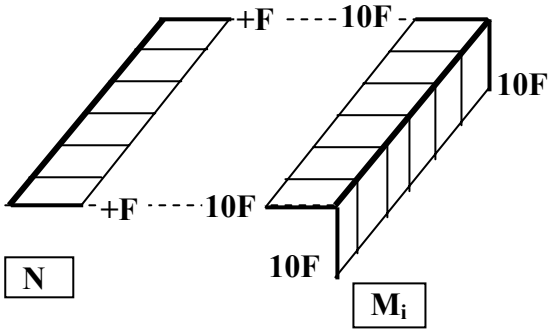
b) A = 5.400 mm^2, I_z = 746,82·10^4 mm^4, I_y = 202,5·10^4 mm^4, N = -60 kN, M_{iz} = 3,6 kN·m, M_{iy} = 4,3 kN·m, $\sigma_{max,t}$ = +81,5 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -103,72 MPa

c) z_0 = -5,23 mm, y_0 = -23,05 mm



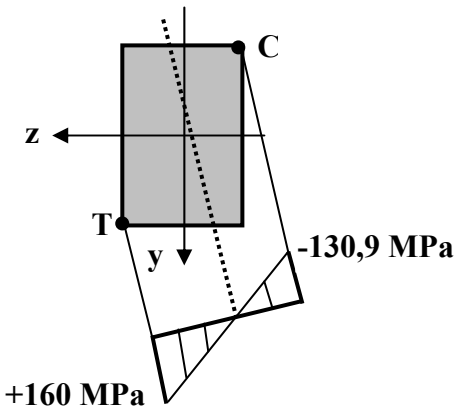
8.1.1-16

a)



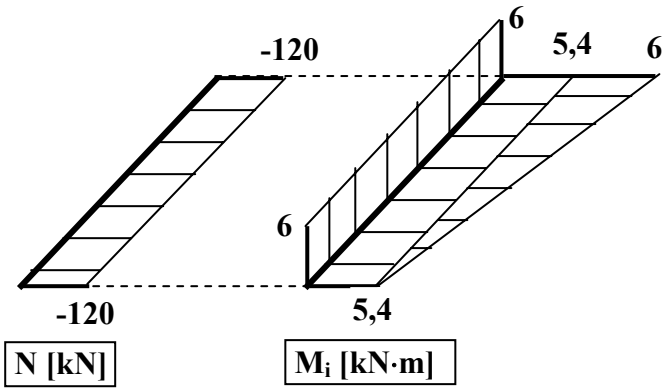
b) A = 2.400 mm^2, I_z = 72·10^4 mm^4, I_y = 32·10^4 mm^4, N = F, M_{iz} = 10 F, M_{iy} = 10 F, F_{cap} = 69,828 kN

c) z_0 = -1,33 mm, y_0 = -10 mm



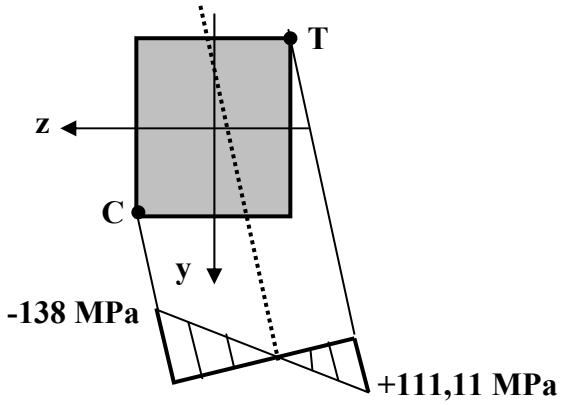
8.1.1-17

a)



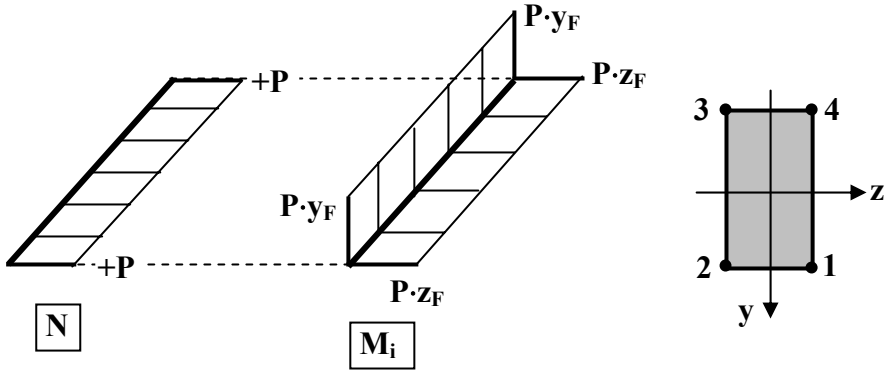
b) $A = 9.000\ mm^2$, $I_z = 7{,}5\cdot10^6\ mm^4$, $I_y = 6{,}075\cdot10^6\ mm^4$, $N = -120\ kN$, $M_{iz} = 6\ kN\cdot m$, $M_{iy} = 11{,}4\ kN\cdot m$, $\sigma_{max,t} = +111{,}11\ MPa$, $\sigma_{max,c} = -138\ MPa$

c) $z_0 = -7{,}1\ mm$, $y_0 = -16{,}67\ mm$



8.1.1-18

a)



$A = b \cdot h$, $(i_z)^2 = h^2/12 = b^2/4$, $(i_y)^2 = b^2/12$, $y_2 = b \cdot 3^{1/2}/2$, $z_2 = -b/2$, $y_4 = -b \cdot 3^{1/2}/2$, $z_4 = b/2$

$$\sigma_2 = \frac{P}{bh} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot y_F + \frac{6}{b} \cdot z_F + 1 \right)$$

$$\sigma_4 = \frac{P}{bh} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot y_F - \frac{6}{b} \cdot z_F + 1 \right)$$

$\sigma_2 = \sigma_4 \Rightarrow z_F = y_F / 3^{1/2}$

b) Pentru $y_F = b/2$ şi $z_0 = b/2 \cdot 3^{1/2}$ şi $\sigma_2 = 25$ MPa $\Rightarrow P/bh = 25$.
În punctul 1, $y_1 = b \cdot 3^{1/2}/2$ şi $z_1 = b/2 \Rightarrow$

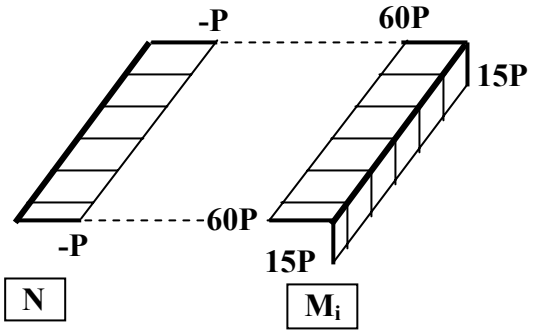
$$\sigma_1 = \frac{P}{bh} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} + 1\right) = 111{,}6 \quad \text{MPa}$$

În punctul 2, $y_2 = b \cdot 3^{1/2}/2$ şi $z_2 = -b/2 \Rightarrow$

$$\sigma_2 = \frac{P}{bh} \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{3} + 1\right) = -61{,}6 \quad \text{MPa}$$

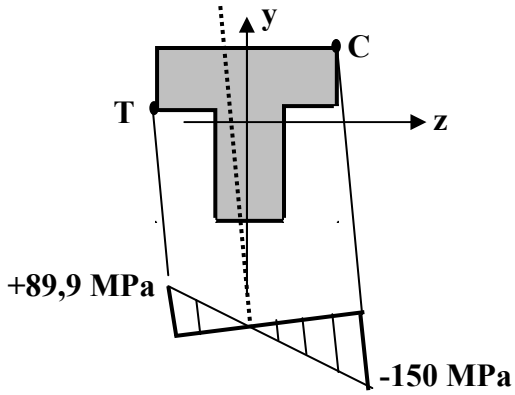
8.1.1-19

a) $y_G = 105$ mm, $y_P = 15$ mm, $z_P = 60$ mm



b) $A = 14.400$ mm^2, $I_z = 39{,}96 \cdot 10^6$ mm^4, $I_y = 10{,}8 \cdot 10^6$ mm^4 $N = -P$, $M_{iz} = 15P$, $M_{iy} = 60P$, $P_{cap} = 348$ kN

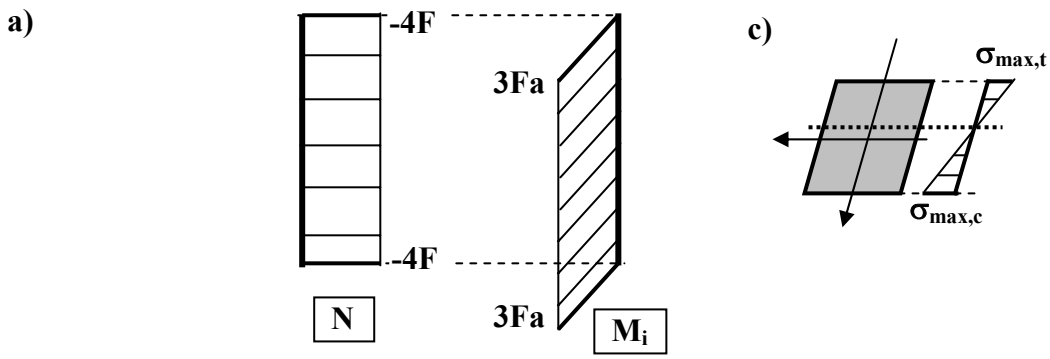
c) $z_0 = -12{,}5$ mm, $y_0 = -185{,}2$ mm



8.1.1-20

a) $\sigma_{max,t}$ = 52,863 MPa
b) $\sigma_{max,t}$ = 145,7 MPa

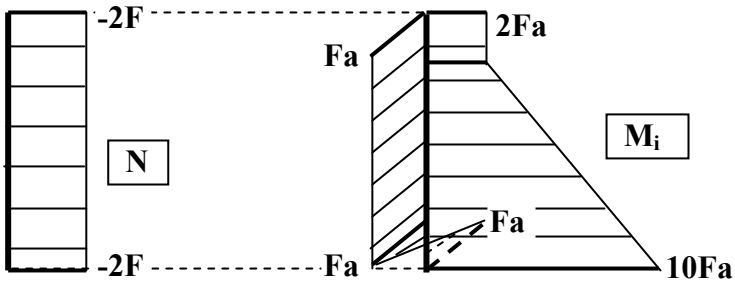
8.1.1-21



b) N = -4F, M_i = 3Fa, a = 36 mm.

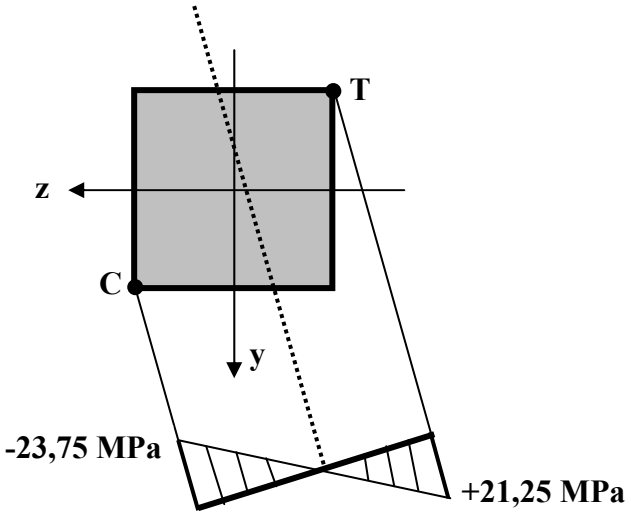
8.1.1-22

a)



b) N = -2F, M_{iz} = Fa, M_{iy} = 10 Fa, $\sigma_{max,t}$ = +21,25 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -23,75 MPa

c) z_0 = -13,33 mm, y_0 = - 33,33 mm



8.1.1-23

La aceste variante de probleme nu se dau rezultatele. Pentru o verificare a calculelor se recomandă consultarea unei persoane de specialitate.

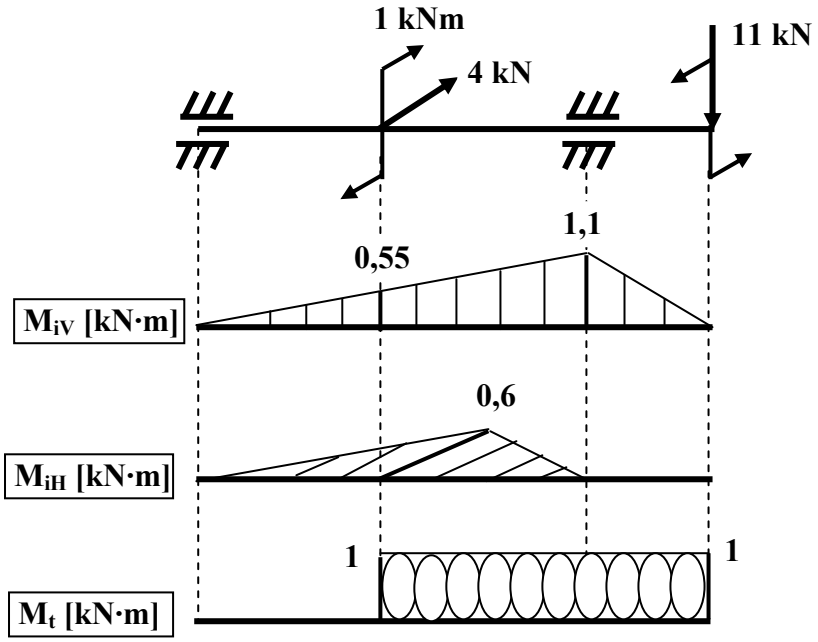
8.1.1-24

La aceste variante de probleme nu se dau rezultatele. Pentru o verificare a calculelor se recomandă consultarea unei persoane de specialitate.

8.1.2 Solicitarea compusă de categoria a II-a

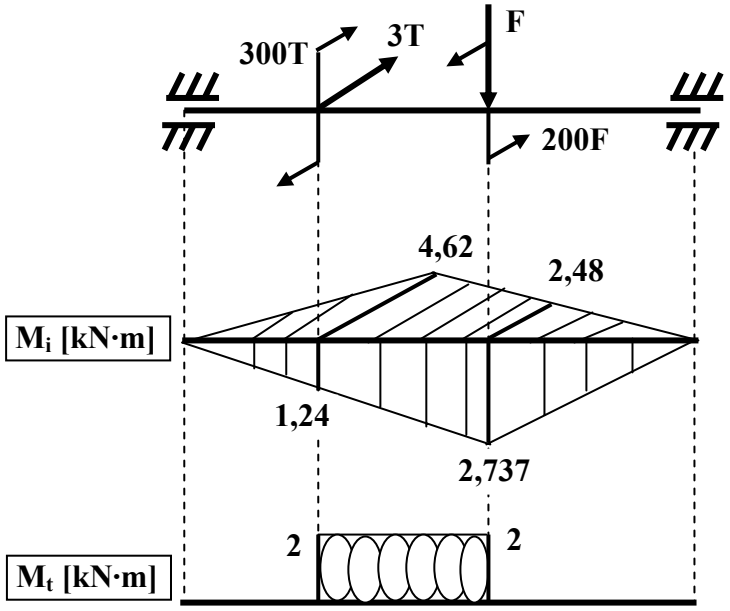
8.1.2-1

a)



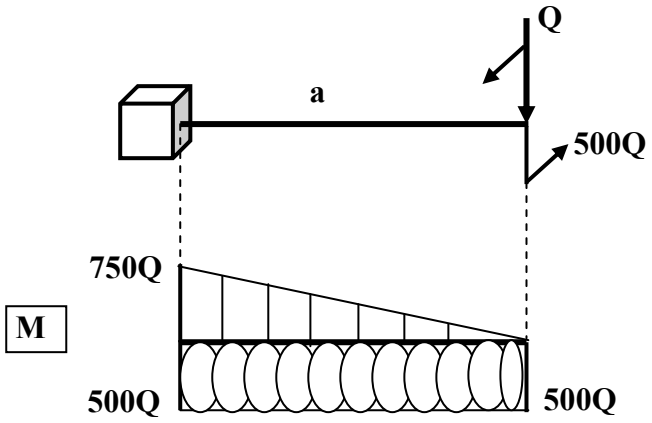
b) $M_{i,rez}$ = 1,1 kNm, M_t = 1 kNm, $M_{ech\ (3)}$ = 1,4866 kNm, d = 47,62 mm

8.1.2-2



b) F = 10 kN, T = 13,33 kN, $M_{i,rez}$ = 4,787 kN·m, $M_{ech\ (3)}$ = 5,188 kN·m, d = 76,08 mm

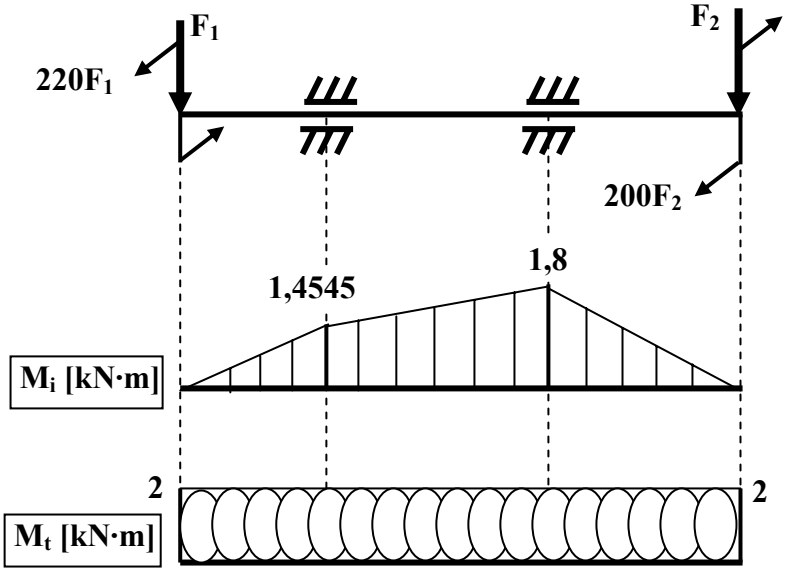
8.1.2-3



d ≅ 80 mm.

8.1.2-4

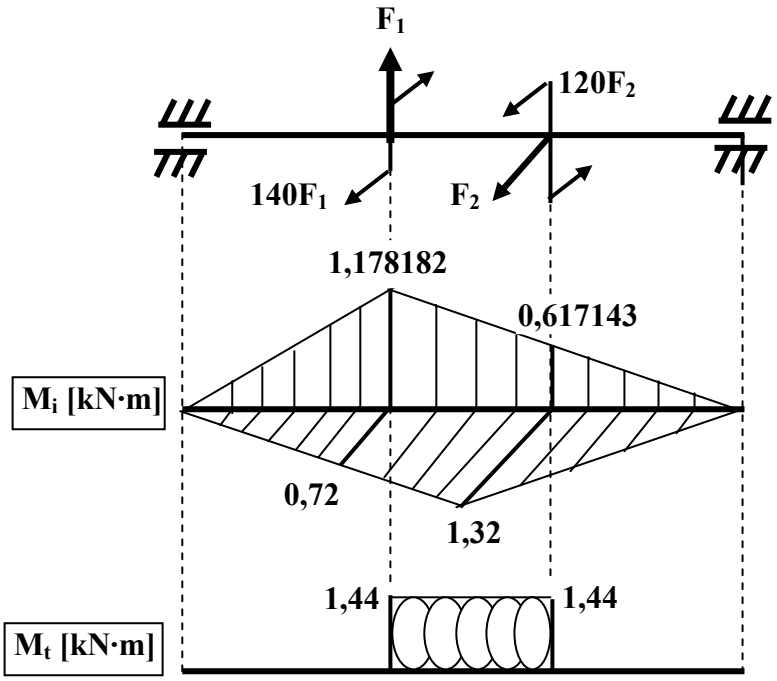
a) F_1 = 9,091 kN



b) M_i = 1,8 kN·m, M_t = 2 kN·m, $M_{ech\ (3)}$ = 2,6907 kN·m, d ≅ 58 mm.

8.1.2-5

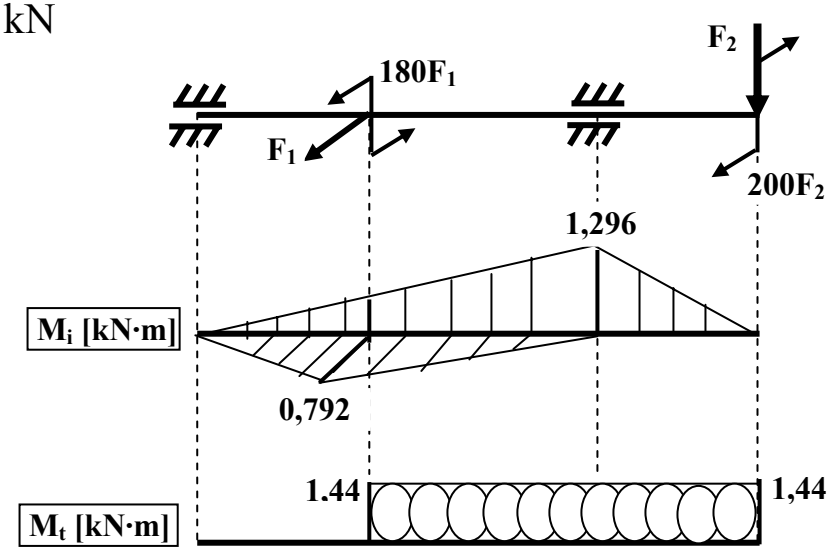
a) F_1 = 10,2857 kN



b) $M_{i,rez}$ = 1,457143 kN·m, M_t = 1,44 kN·m, $M_{ech\ (3)}$ = 2,048625 kN·m, d =57,46 mm.

8.1.2-6

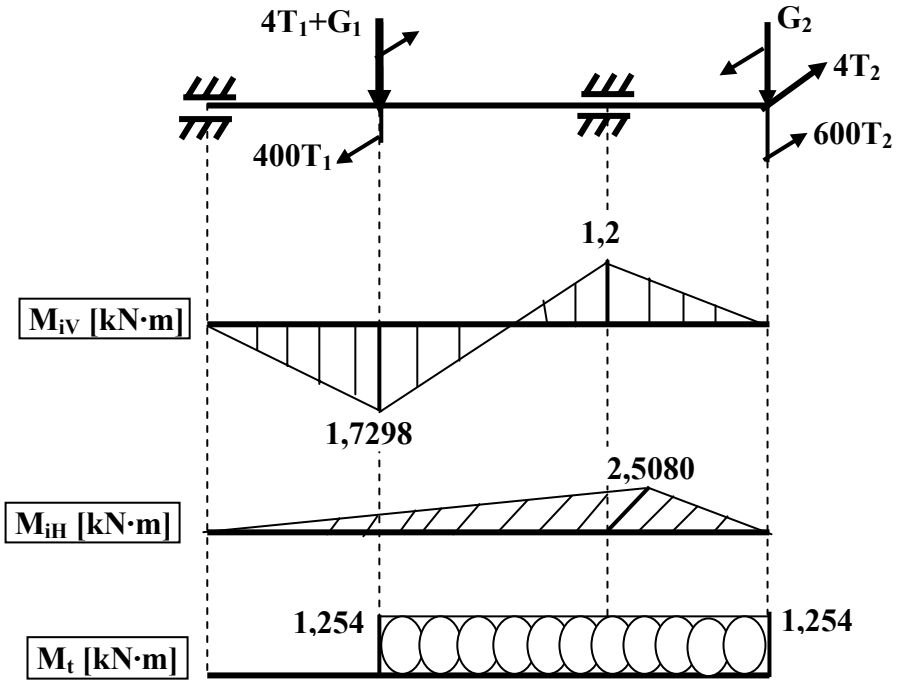
a) F_2 = 7,2 kN



b) $M_{i,rez}$ =1,296 kN·m, M_t = 1,44 kN·m, $M_{ech\ (3)}$ = 1,937322 kN·m, d = 54,79 mm.

8.1.2-7

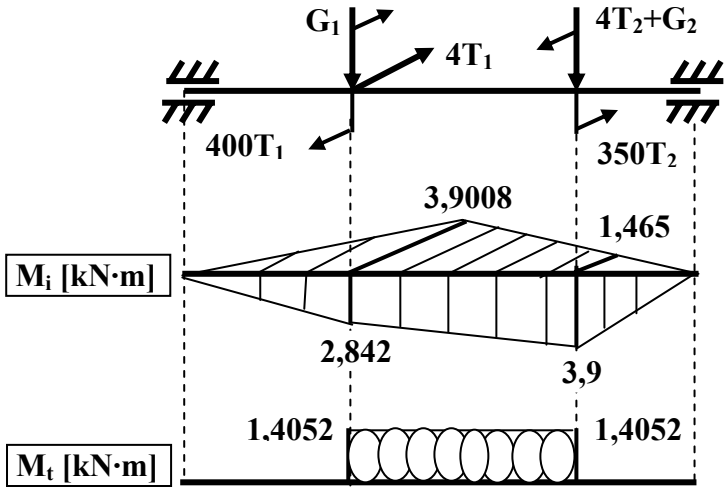
a) T_1 = 313,3 daN, T_2 = 209 daN, M_t = 1,254 kN·m



b) M_{iV} = 1,2 kN·m, M_{iH} = 2,5080 kN·m, $M_{i,rez}$ = 2,77 kN·m, M_t = 1,254 kN·m, $M_{ech\ (3)}$ = 3,04 kN·m, σ_{rez} = 21,26 MPa, τ = 4,79 MPa, $\sigma_{ech\ (3)}$ = 23,3 MPa

8.1.2-8

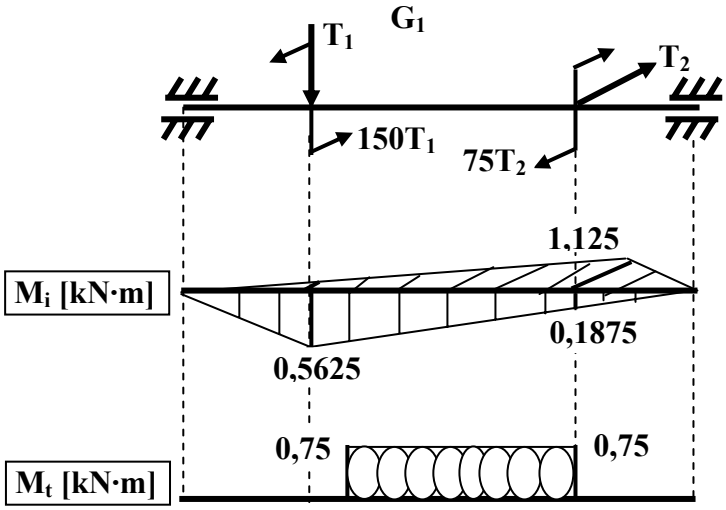
a) T_1 = 10,75 kN, T_2 = 6,15 kN, M_t = 1,4052 kN·m



b) M_{iV} = 2,842 kN·m, M_{iH} = 3,9008 kN·m, $M_{i,rez}$ = 4,86 kN·m, $M_{ech\ (5)}$ = 4,98 kN·m, d = 98,96 mm.

8.1.2-9

a)



b) M_{iV} = 0,1875 kNm, M_{iH} = 1,125 kNm, $M_{i,rez}$ = 1,14 kNm, $M_{ech\ (5)}$ = 1,312 kNm, d = 51 mm.

8.1.2-10

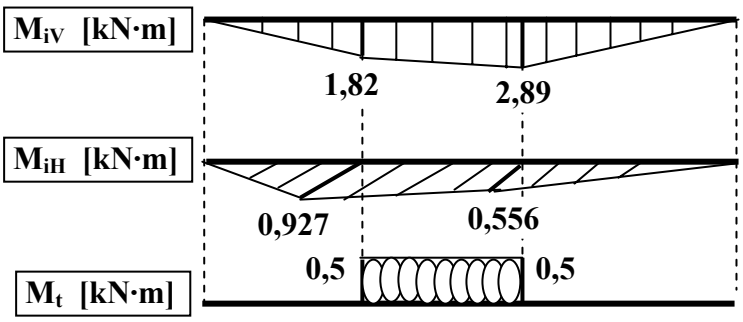
M_t = 2,865 kN·m, σ_{max} = N/A = 39,8 MPa, $\tau_{max} = M_t/W_p$ = 28,5 MPa

$\sigma_{ech\ (3)}$ = 69,5 MPa, $\sigma_{ech\ (4)}$ = 63,4 MPa

8.1.2-11

a) Q = 3,335 kN

b)

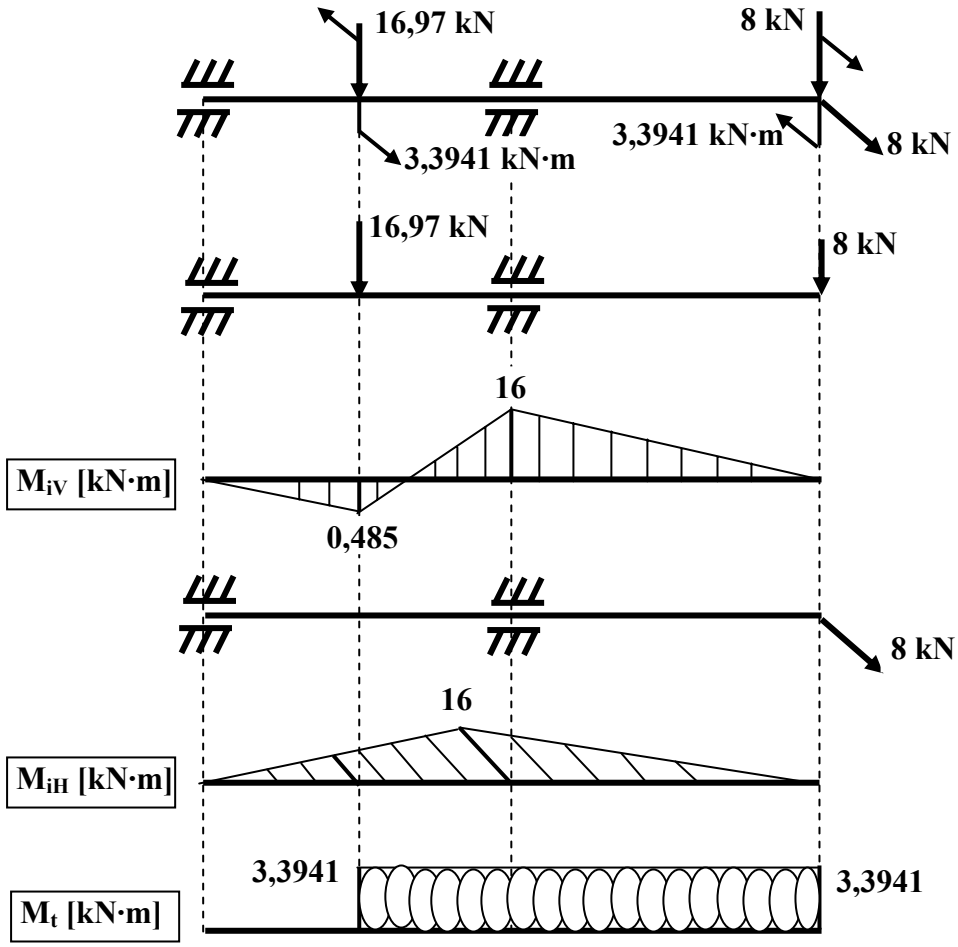


c) M_{iV} = 2,89 kN·m, M_{iH} = 0,556 kN·m, M_t = 0,5 kN·m, $M_{ech\ (3)}$ = 2,985 kN·m, $\sigma_{ech\ (3)}$ = 86,87 MPa

8.1.2-12

a) F_1 = 16,97 kN

b)



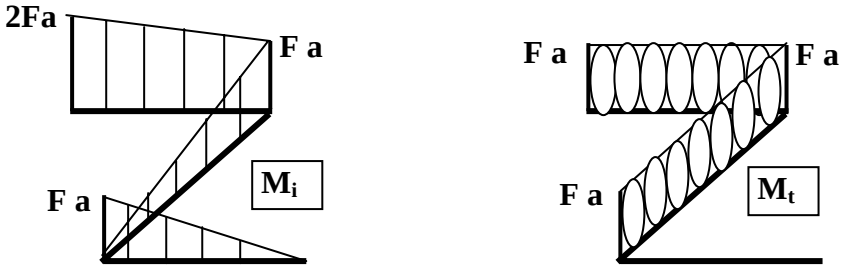
M_{iV} = 16 kN·m, M_{iH} = 16 kN·m, M_t = 3,3941 kN·m, $M_{ech\ (3)}$ = 22,88 kN·m, d = 133 mm.

8.1.2-13

La aceste variante de probleme nu se dau rezultatele. Pentru o verificare a calculelor se recomandă consultarea unei persoane de specialitate.

8.1.2-14

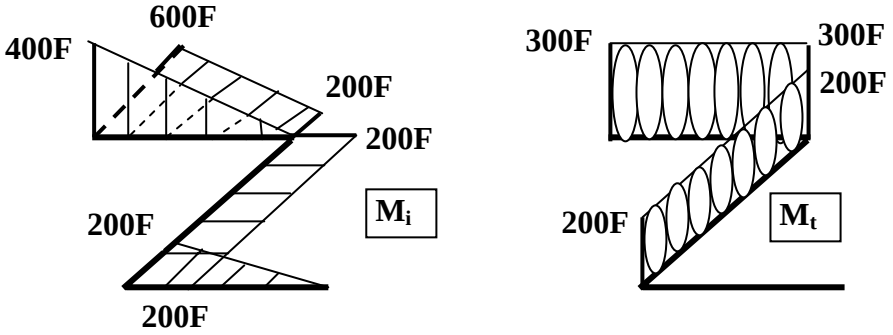
a)



b) $M_{i,rez}$ = 2Fa, M_t = Fa, $M_{ech\ (5)}$ = 2,1794 Fa, d = 72 mm, D = 144 mm.

8.1.2-15

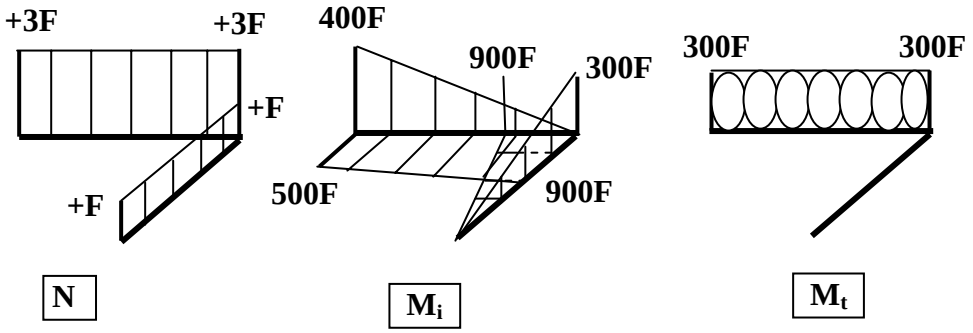
a)



b) M_{iV} = 400 F, M_{iH} = 600 F, $M_{i,rez}$ = 721,11F, $M_{ech\ (5)}$ = 766,48F = 15.329,71 kN·mm , d ≅ 102 mm.

8.1.2-16

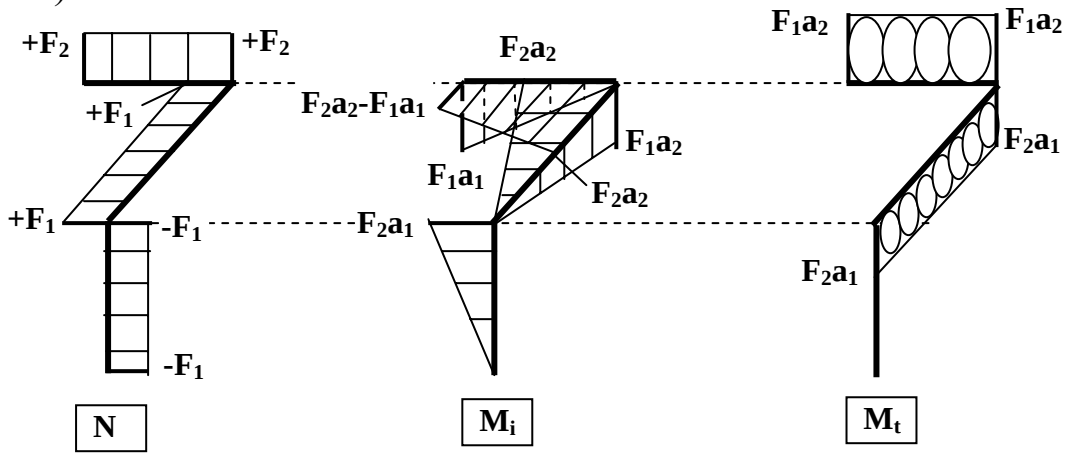
a)



b) $N = +3F$, $M_{i,rez} = 900\ F$, $M_t = 300\ F$, $F_{cap} \cong 625$ N.

8.1.2-17

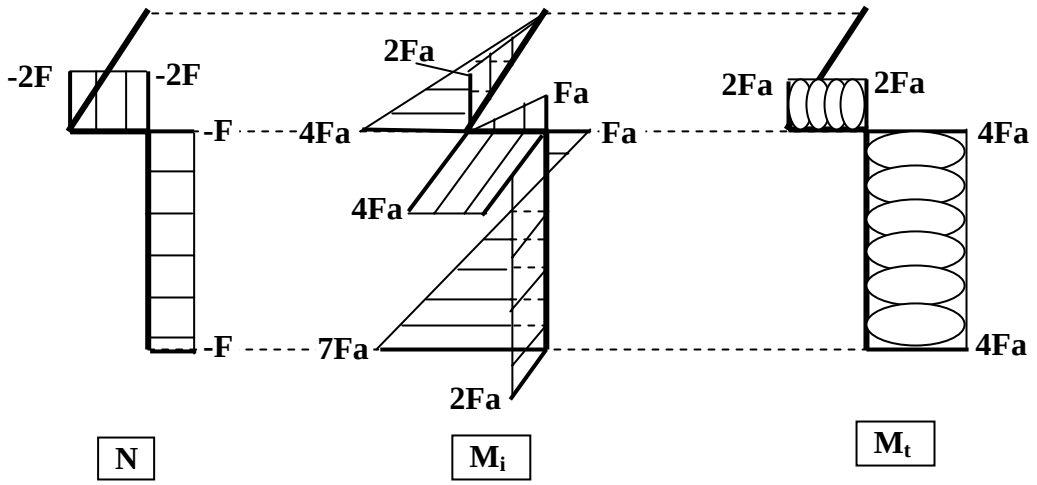
a)



b) $N = F_1 = +\ 0{,}6$ kN, $M_{iV} = F_1 \cdot a_1 = 0{,}15$ kN·m, $M_{iH} = F_2 \cdot a_2 = 0{,}2$ kN·m, $M_{i,rez} = 0{,}25$ kN·m, $M_t = F_2 \cdot a_1 = 0{,}12$ kN·m, $\sigma_{max} = 40{,}27$ MPa, $\tau_{max} = 9{,}55$ MPa, $\sigma_{ech\ (3)} = 44{,}57$ MPa

8.1.2-18

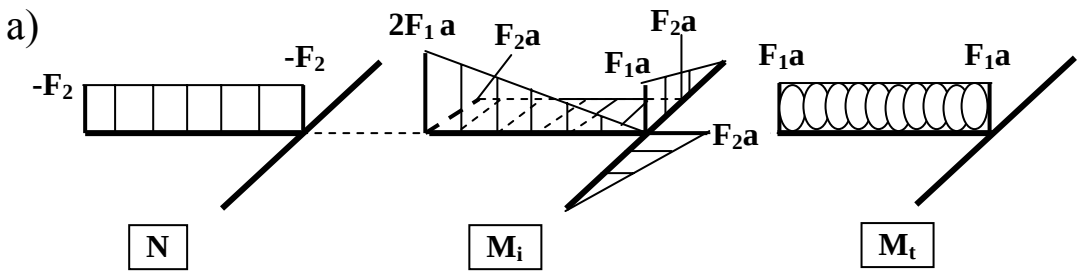
a)



b) $N = -F$, $M_{iz} = 2Fa$, $M_{iy} = 7Fa$, $M_t = 4Fa$, $\sigma_{max} = 0{,}069015\ F$, $\tau_{max} = 0{,}018863\ F$, $F_{cap} = 1{,}271$ kN

8.1.2-19

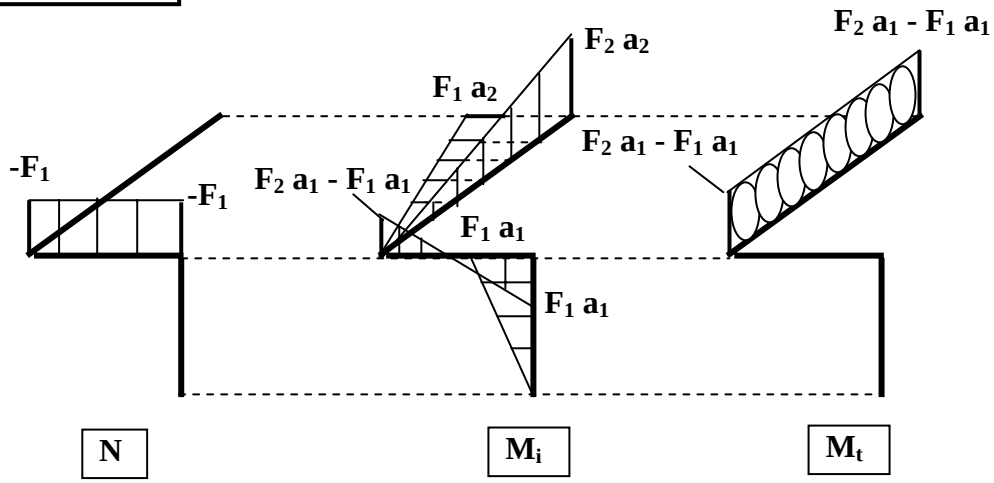
a)



b) $N = -F_2$, $M_{iV} = 2F_1 \cdot a$, $M_{iH} = F_2 \cdot a$, $M_t = F_1 \cdot a = 2{,}8 \cdot 10^5$ N·mm, $M_{i,rez} = 5{,}727 \cdot 10^{\cdot 5}$ N·mm, d = 52,77 mm.

8.1.2-20

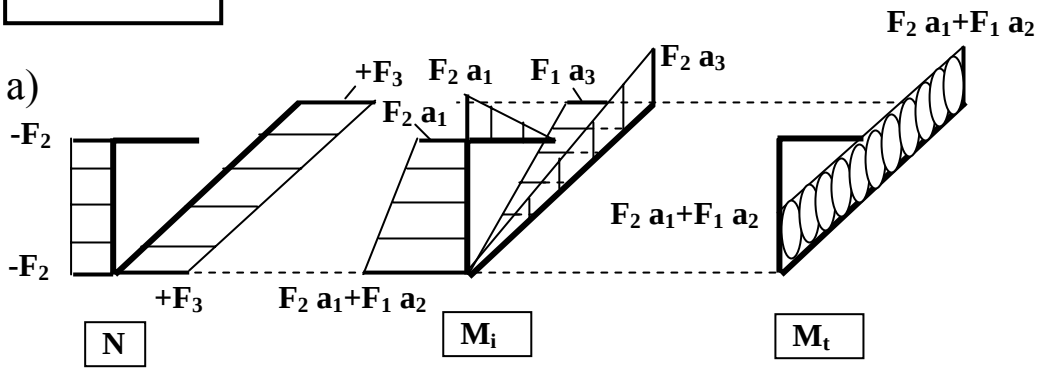
a)



b) $N = -0{,}6$ kN, $M_{iV} = 0{,}2$ kN·m, $M_{iH} = 0{,}15$ kN·m, $M_{i,rez} = 0{,}25$ kN·m, $M_t = 0{,}03$ kN·m, $M_{ech\,(3)} = 0{,}251794$ kN·m, $\sigma_{ech\,(3)} = 2{,}5$ MPa

8.1.2-21

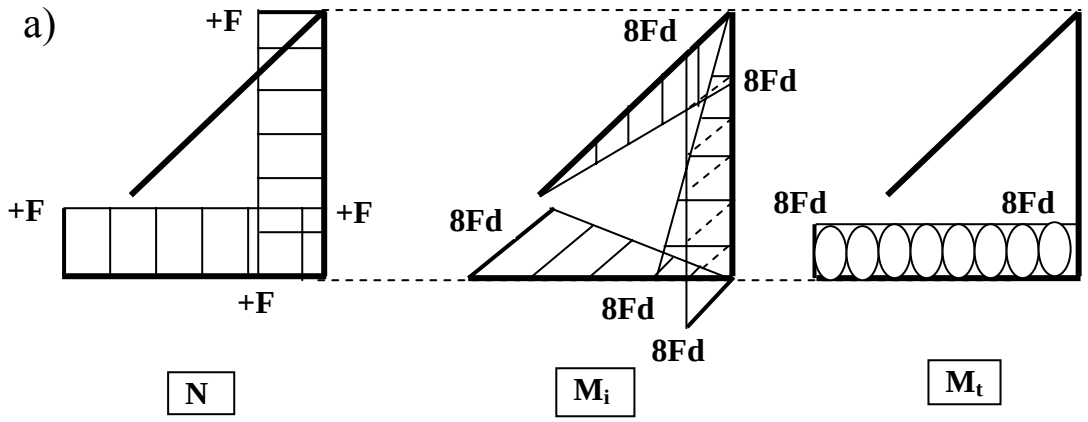
a)



b) $N = +F_3 = 80$ kN, $M_{iV} = F_2 \cdot a_3 = 32$ kN·m, $M_{iH} = F_1 \cdot a_3 = 20$ kN·m, $M_{i,rez} = 37{,}73$ kN·m, $M_t = 24{,}5$ kN·m, $d \cong 145$ mm

8.1.2-22

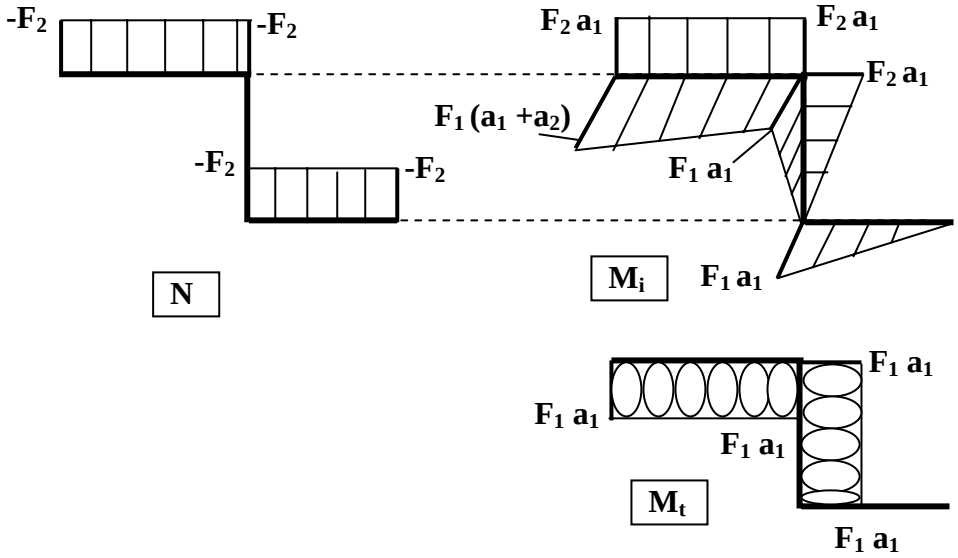
a)



b) $N = +F$, $M_{i,rez} = 8Fd$, $M_t = 8Fd$, $\sigma_{max} = 65$ F/A, $\tau_{max} = 32$ F/A, $\sigma_{ech\,(3)} = 91{,}22$ F/A = 108,885 MPa

8.1.2-23

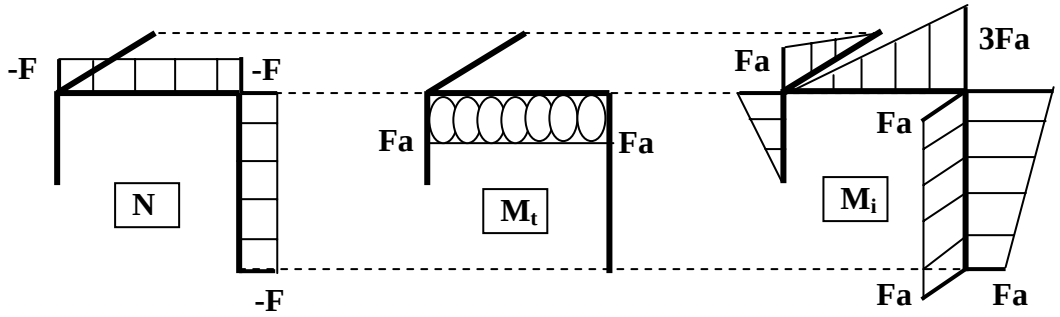
a)



b) $N = -F = -0{,}8$ kN, $M_{iV} = F_2 \cdot a_1 = 0{,}12$ kN·m, $M_{iH} = F_1 \cdot (a_1 + a_2) = 0{,}24$ kN·m, $M_t = F_1 \cdot a_1 = 0{,}09$ kN·m, $M_{i,rez} = 0{,}26832$ kN·m, $\sigma_{max} = 43{,}34$ MPa, $\tau_{max} = 7{,}16$ MPa, $\sigma_{ech\,(3)} = 45{,}64$ MPa

8.1.2-24

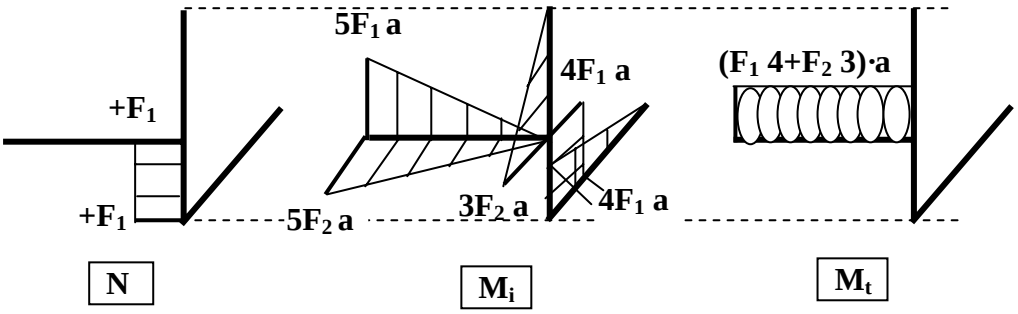
a)



b) N = -F = -20 kN, M_{iV} = 3Fa = 24 kN·m, M_{iH} = 0, M_t = Fa = 8 kN·m, $M_{i,rez}$ = 3Fa = 24 kN·m, $M_{ech\ (3)}$ = 3,162 Fa = 25,298 kN·m, d = 119,76 mm

8.1.2-25

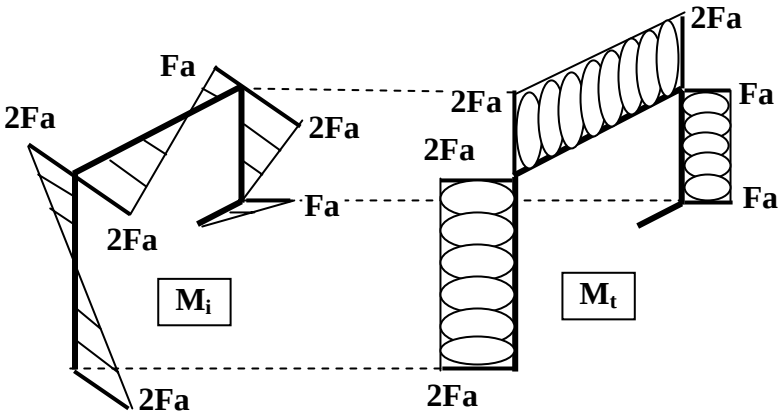
a)



b) N = 0, M_{iV} = 1 kN·m, M_{iH} = 0,5 kN·m, $M_{i,rez}$ = 1,118 kN·m, M_t = 1,1 kN·m, $M_{ech\ (3)}$ = 1,5684 kN·m, d = 51 mm.

8.1.2-26

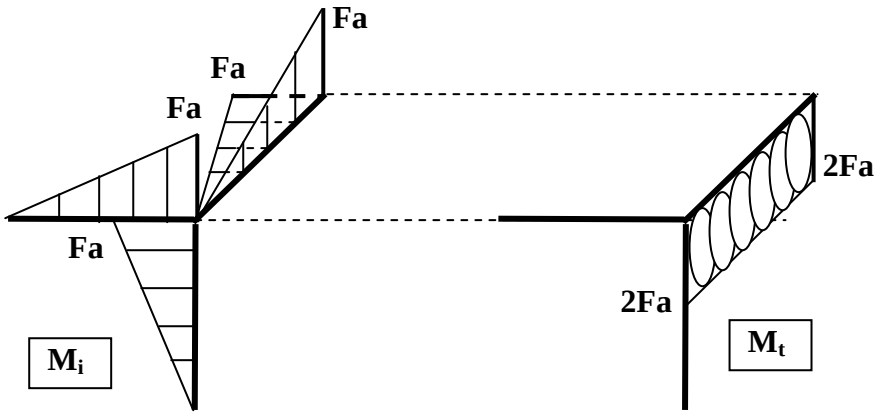
a)



b) $M_{i,rez} = 2Fa$, $M_t = 2Fa$, $M_{ech\ (3)} = 22{,}6274$ kN·m, D = 171 mm, d = 142 mm

8.1.2-27

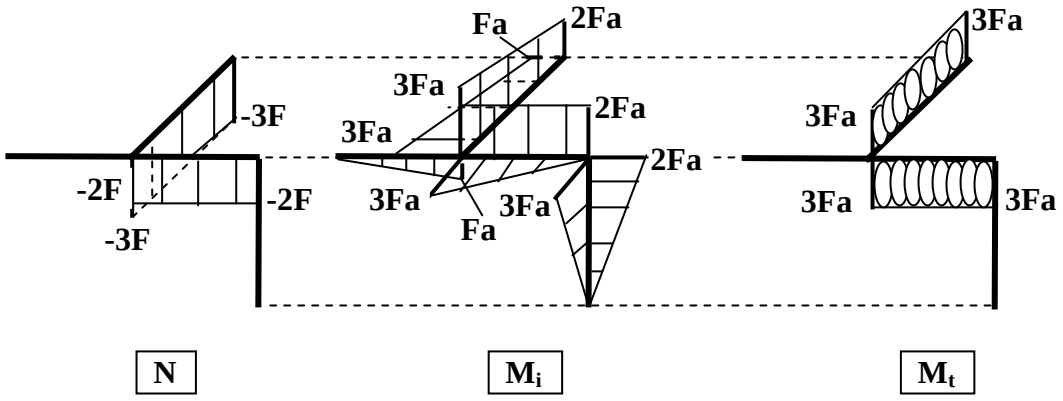
a)



b) $M_{iz} = Fa$, $M_{iy} = Fa$, $M_t = 2Fa$, $M_{ech\ (3)} = (6)^{1/2}$ Fa, F = 2,052 kN

8.1.2-28

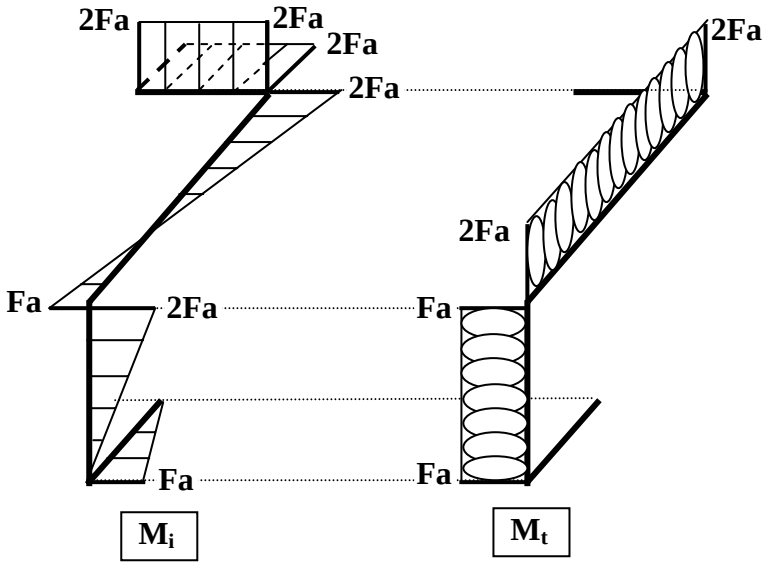
a)



b) $M_{iz} = 3Fa$, $M_{iy} = 3Fa$, $M_t = 3Fa$, $M_{ech\ (3)} = 5{,}196$ Fa, $\sigma_{ech\ (3)} = 206{,}7$ MPa $< \sigma_{a\ (3)}$

8.1.2-29

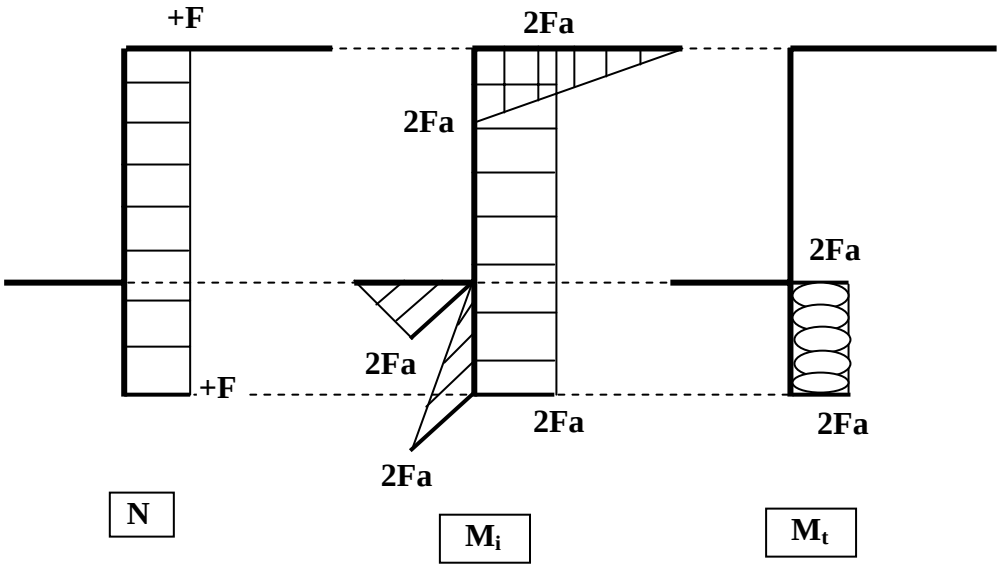
a)



b) $M_{ech\,(3)} = 2{,}82$ Fa, $F_{cap} = 6{,}21$ kN

8.1.2-30

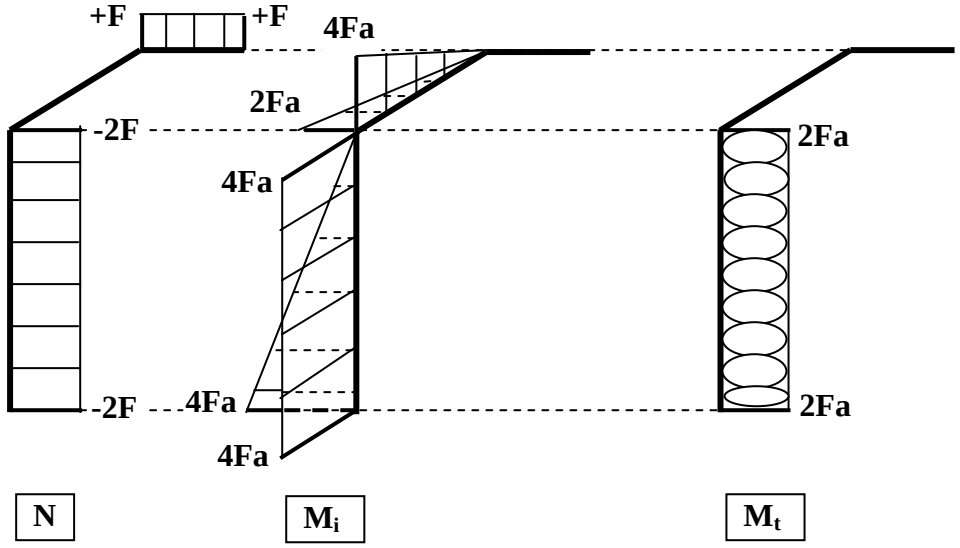
a)



b) $M_{iz} = 2$Fa, $M_{iy} = 2$Fa, $M_t = 2$Fa, $M_{ech(3)} = 3{,}4641$ Fa, $\sigma_{ech(3)} = 82$ MPa $< \sigma_a = 100$ MPa

8.1.2-31

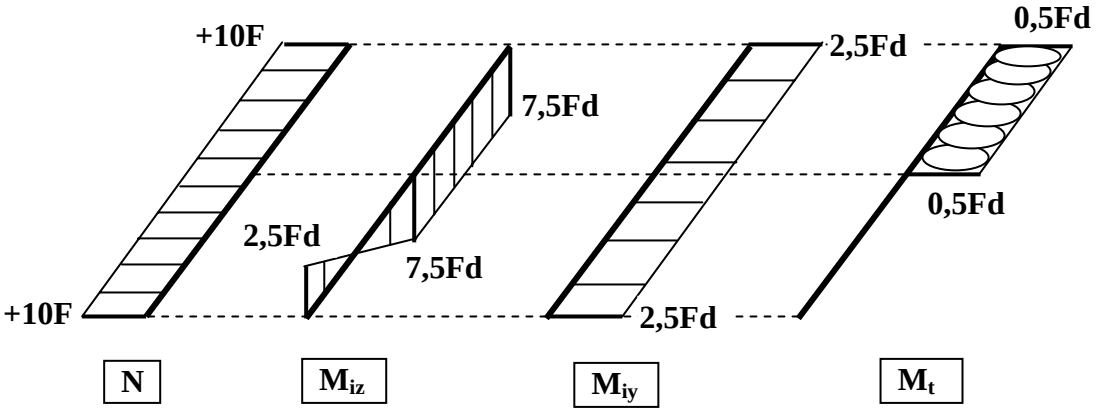
a)



b) N = -2F, M_{iz} = 4Fa, M_{iy} = 4Fa, M_t = 2Fa, $M_{i,rez}$ = 5,6568 Fa, $\sigma_{ech(3)}$ = 6,438 MPa

8.1.2-32

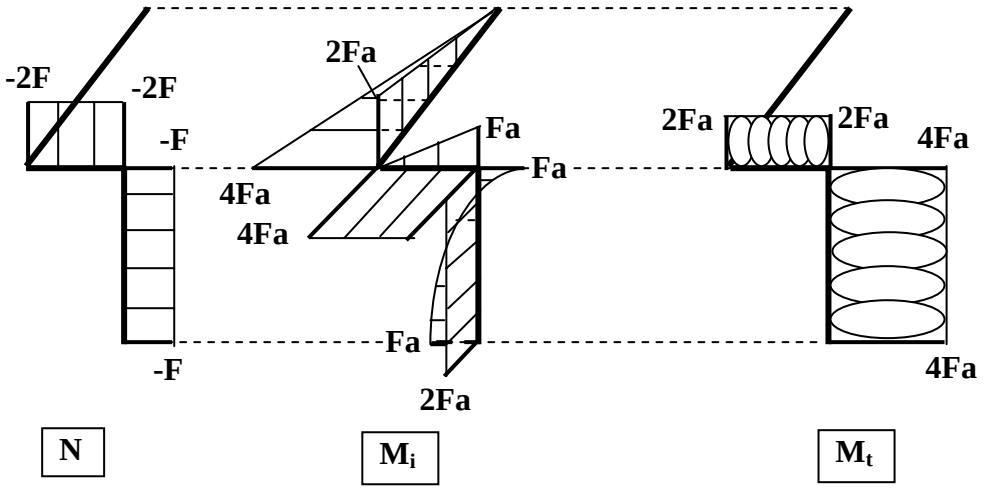
a)



b) N = +10F, M_{iz} = 7,5Fd, M_{iy} = 2,5Fd, M_t = 0,5Fd, σ = 93,26 F/d^2, τ = 2,55 F/d^2, d = 43,2 mm

8.1.2-33

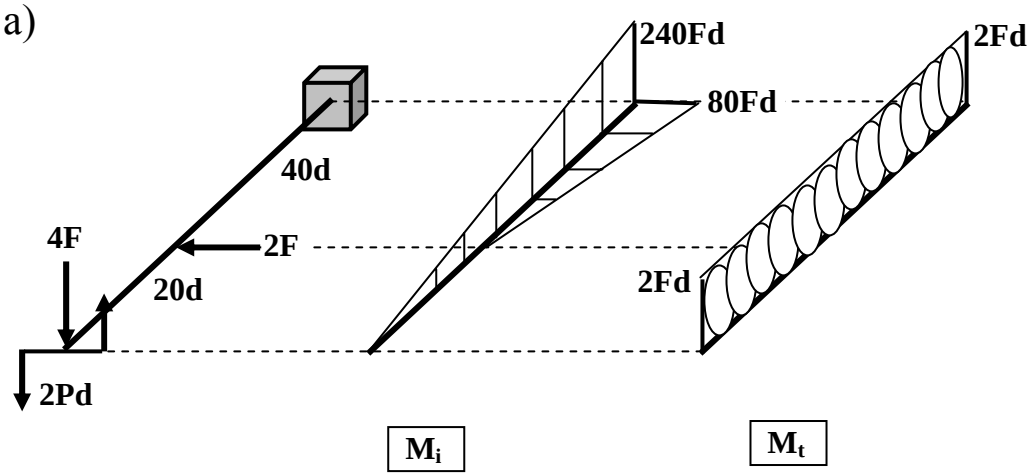
a)



b) N = -2F, M_{iz} = Fa, M_{iy} = 4Fa, M_t = 2Fa, $M_{i,rez}$ = 4,12 Fa, σ_{rez} = $97{,}96\cdot10^{-3}$ F, $\tau = 23{,}6\cdot10^{-3}$ F, $\sigma_{ech\ (3)} = 108{,}66\cdot10^{-3}$ F, F_{cap} = 1,1 kN

8.1.2-34

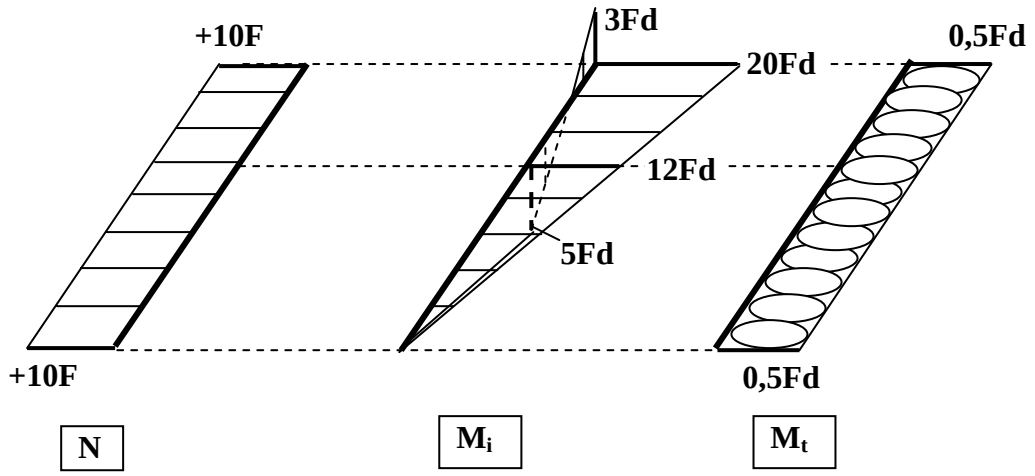
a)



b) N = 0, M_{iz} = 240 Fd, M_{iy} = 80 Fd, M_t = 2Fd, $M_{ech\ (3)}$ = 253 Fa, d = 507,64 mm

8.1.2-35

a)

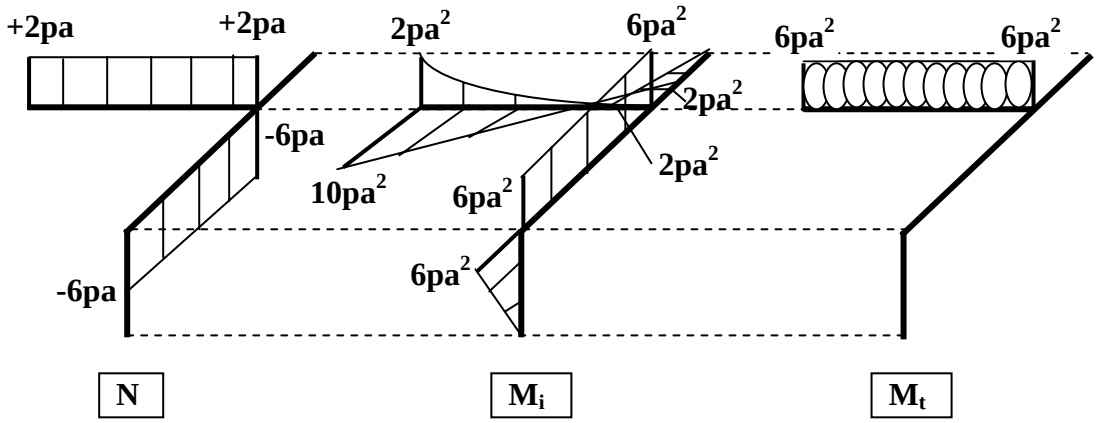


b) N = +10F, M_{iz} = 3Fd, M_{iy} = 20Fd, M_t = 0,5Fd, $F_{cap} = \sigma_a \cdot d^2/145{,}22 = 2{,}4789$ kN

c) $F_{cap} = \sigma_a \cdot d^2/28{,}93 = 12{,}4438$ kN

8.1.2-36

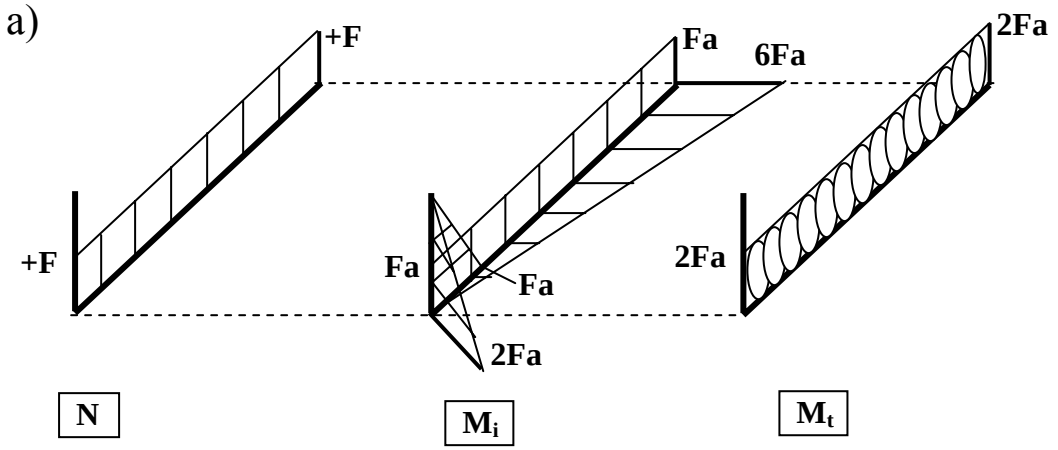
a)



b) N = +2pa, $M_{iz} = 2pa^2$, $M_{iy} = 10pa^2$, $M_t = 6pa^2$, σ_{rez} = 481,616p, τ = 141,471p, $\sigma_{ech\,(3)}$ = 558,578p, p_{cap} = 5,58578 kN/m

8.1.2-37

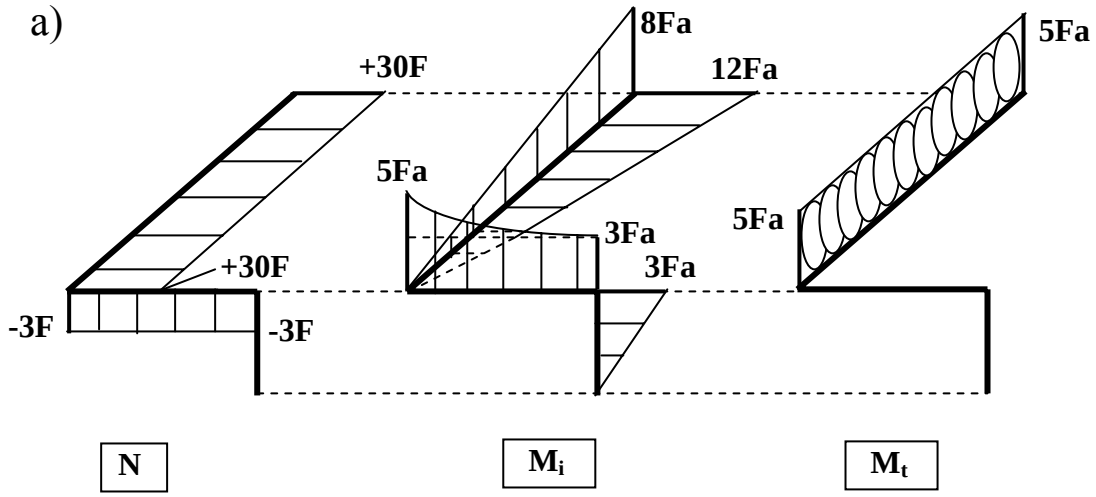
a)



b) N = F, M_{iz} = Fa, M_{iy} = 6Fa, M_t = 2Fa, $M_{i,rez}$ = 6,88276 Fa, $M_{ech\ (3)}$ = 6,32455 Fa, d = 81 mm

8.1.2-38

a)

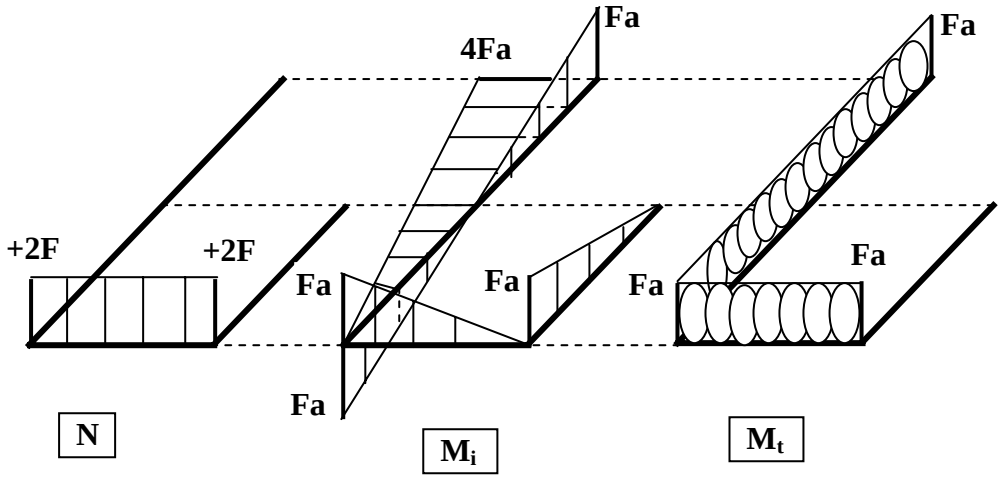


b) N = +30F, M_{iz} = 8Fa, M_{iy} = 12Fa, M = 5Fa, $M_{i,rez}$ = 14,42 Fa, σ_{rez} = 0,941F, τ = 0,159F, F_{cap} = 151 N

Dacă se neglijează N $\Rightarrow$ F_{cap} = 154,35 N

8.1.2-39

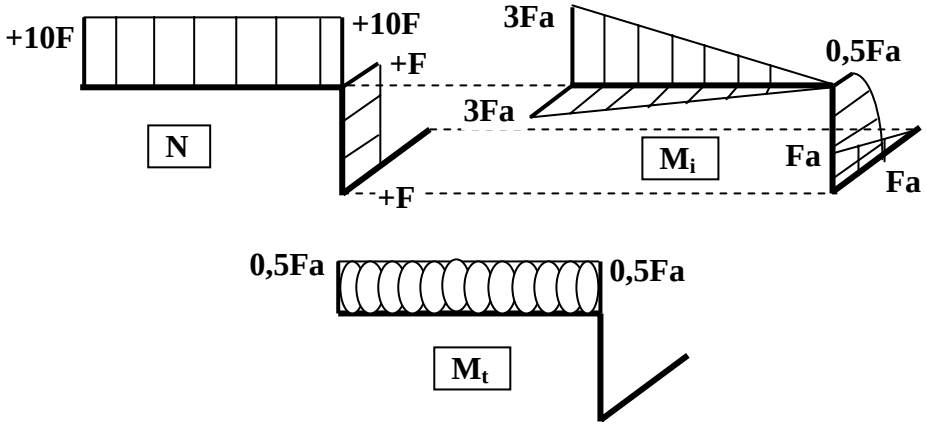
a)



b) M_{iz} = Fa, M_{iy} = 4Fa, $M_{i,rez}$ = 4,1231 Fa, M_t = Fa, $M_{ech\ (3)}$ = 4,2426 Fa, $\sigma_{ech\ (3)}$ = 86,43 MPa

8.1.2-40

a)



b) N = +10F, M_{iz} = 3Fa, M_{iy} = 3Fa, $M_{i,rez}$ = 4,24264 Fa, σ_{rez} = 444,88 F/d^2, τ = 25,465 F/d^2, d = 78 mm.

8.2 CALCULUL DEFORMAȚIILOR PRIN METODE ENERGETICE

8.2.1 Sisteme static determinate

8.2.1-1

$\delta_1 = 7\ pa^4/24EI$, în jos; $\varphi_1 = pa^3/6EI$, în sens orar

8.2.1-2

$\delta_1 = 7\ Fa^3/6EI$, în sus; $\varphi_2 = Fa^2/2$, în sens antiorar

8.2.1-3

$\delta_3 = 2\ Fa^3/3EI$; $\varphi_1 = 43\ Fa^2/12EI$

8.2.1-4

$\delta_1 = 19\ pa^4/24EI$, în jos; $\varphi_A = 2\ pa^3/3EI$, în sens antiorar

8.2.1-5

$\delta_1 = 5pa^4/3EI$, în sus; $\delta_2 = 2pa^4/3EI$, în jos; $\varphi_A = pa^3/EI$, în sens orar

8.2.1-6

$\delta_1 = pa^4/24EI$, în sus; $\varphi_A = pa^3/6EI$, în sens orar; $\varphi_B = 0$

8.2.1-7

$\delta_1 = pa^4/EI$, în jos; $\varphi_A = 0{,}67pa^3/EI$ în sens antiorar

8.2.1-8

$\delta_1 = 2{,}734 \cdot 10^{-3}\ pa^4/EI$

8.2.1-9

$\delta_1 = 1{,}8626$ mm

8.2.1-10

$\delta_2 = 11\ pa^4/8EI$, în jos; $\varphi_A = \varphi_B = 7\ pa^3/6EI$

8.2.1-11

$\Delta_1 = pa^4/24EI = 9{,}27$ mm, în sus; $\delta_2 = pa^4/4EI = 55{,}63$ mm, în jos; $\varphi_A = 5pa^3/32EI = 0{,}03474$ rad = 1,99°, în sens antiorar

8.2.1-12

$\delta_2 = pa^4/2EI = 2{,}857$ mm, în jos

8.2.1-13

$\delta_3 = pa^4/EI = 1{,}691$mm, în sus

8.2.1-14

$\delta_2 = pa^4/4EI$, în jos; $\varphi_3 = pa^3/12EI$, în sens antiorar

8.2.1-15

$\delta_2 = 8Fa3/9EI = 4{,}29$ mm; $\varphi_2 = 18Fa^2/27EI = 0{,}3687°$, în sens orar

8.2.1-16

$\delta_{v,1} = 7Fa^3/3EI$ şi $\delta_{h,1} = 3\ Fa3/EI$

8.2.1-17

$\delta_{v,1} = -4pa^4/3EI$ şi $\varphi_2 = 4pa^3/3EI$ antiorar

8.2.1-18

$\delta_{h,1} = 8{,}733\ pa^4/EI$, în sensul forței; $\delta_{v,2} = 1{,}54167\ pa^4/EI$, în sus; $\varphi_3 = 0{,}4667\ pa^3/EI$, în sens antiorar

8.2.1-19

$\delta_{v,1} = 23Fa^3/3EI$, $\delta_{h,1} = 3Fa^3/EI$ spre dreapta, $\delta_1 = 8{,}233Fa^3/EI$

8.2.1-20

$\delta_{v,1} = 14Fa^3/EI$, $\delta_{h,1} = 8{,}5Fa^3/EI$ spre dreapta, $\delta_1 = 16{,}378Fa^3/EI$

8.2.1-21

$\delta_{v,1} = 3Fa^3/EI$, $\delta_{h,1} = Fa^3/EI$ spre dreapta, $\delta_1 = 3{,}162\ Fa^3/EI$

8.2.1-22

$\delta_{v,1} = 0,5\ Fa^3/EI$, $\delta_{h,1} = 0$, $\delta_1 = 0,5\ Fa^3/EI$

8.2.1-23

$\delta_{v,3} = pa^4/24EI$, $\delta_{h,4} = pa^4/8EI$ spre stânga, $\varphi_4 = pa^3/12EI$

8.2.1-24

$\delta_{v,1} = 2,25pa^4/EI$; $\delta_{h,3} = 2pa^4/EI$; $\varphi_4 = 2pa^3/EI$ în sens orar

8.2.1-25

$\delta_{v,3} = 7,6048\ pa^4/EI$, $\delta_{h,1} = 1,8167pa^4/EI$ spre dreapta, $\varphi_2 = 1,55pa^3/\ EI$ în sens orar

8.2.1-26

$\delta_{v,2} = pa^4/EI + 3Fa^3/EI$, în jos; $\delta_{h,1} = 22\ pa^4/3EI + 28Fa^3/3EI$, în sensul forței; $\varphi_3 = 2Fa^2/EI$, în sens antiorar

8.2.1-27

$\delta_{h,2} = 3,25pa^4/EI$; $\delta_5 = 5,74167\ pa^4/EI$; $\varphi_3 = 4,766\ pa^3/EI$

8.2.1-28

$\delta_1 = 93Fa^3/EI$; $\varphi_2 = 2Fa^2/EI$

8.2.1-29

$\delta_1 = 2,25Fa^3/EI$; $\varphi_2 = 0,67\ Fa^2/EI$, în sens orar

8.2.1-30

$\delta_{h,2} = 3,4\ pa^4/EI$; $\delta_{v,1} = 4,2667\ pa^4/EI$; $\varphi_2 = 3,0667\ pa^3/EI$

8.2.1-31

$\delta_{h,5} = 7pa^4/24EI$; $\delta_{v,1} = pa^4/12EI$; $\varphi_4 = pa^3/3EI$

8.2.1-32

$\delta_{h,2} = 5Fa^3/6EI$; $\delta_{v,1} = 5Fa^3/3EI$; $\varphi_6 = 11Fa^2/6EI$, în sens antiorar

8.2.1-33

$\delta_{h,1} = 4pa^4/3EI$; $\delta_{v,3} = pa^4/4EI$; $\varphi_1 = 7pa^3/24EI$

8.2.1-34

$\delta_{v,4} = Fa^3/2EI$; $\delta_5 = Fa^3/4EI$; $\varphi_5 = Fa^2/4EI$

8.2.1-35

$\delta_{h,1} = 1{,}45\ FR^3/EI$; $\delta_{v,1} = 7\ FR^3/6EI$; $\Rightarrow \delta_1 = 1{,}861\ FR^3/EI$; $\varphi_1 = 7\ FR^2/3EI$

8.2.1-36

$\delta_{h,3} = 13{,}4\ FR^3/EI$; $\delta_{v,3} = 39\ FR^3/EI$; $\Rightarrow \delta_1 = 41{,}24\ FR^3/EI$; $\varphi_1 = 20{,}1\ FR^2/EI$

8.2.1-37

$\delta_{v,3} = 3\ pa^4/4EI$; $\delta_4 = 1{,}1\ pa^4/EI$

8.2.1-38

$\delta_{v,1} = 1{,}225\ FR^3/EI$; $\delta_4 = FR^3/2EI$

8.2.1-39

$\delta_{h,1} = 8{,}065\ FR^3/EI$; $\delta_{v,1} = 1{,}856\ FR^3/EI$; $\varphi_3 = 3{,}71\ FR^2/EI$;

8.2.1-40

$\delta_{v,1} = 0{,}071\ FR^3/EI$; $\delta_{h,1} = 0$; $\varphi_1 = 0$

8.2.1-41

$\delta_{v,1} = 4{,}17\ Fa^3/EI = 85\ Fa^3/Ed^4$

8.2.1-42

$\delta_{v,1} = 11\ Fa^3/2EI$

8.2.1-43

$\delta_{v,1} = 11{,}8\ Fa^3/EI$

8.2.1-44

$\delta_{v,1} = 13{,}73\ pa^4/EI$

8.2.1-45

$\delta_{v,1} = 4{,}1\ Fa^3/EI$

8.2.1-46

$\delta_{v,1} = 12{,}4\ Fa^3/EI$

8.2.1-47

$\delta_{v,1} = 13\ Fa^3/6EI = 44{,}14\ Fa^3/Ed^4$

8.2.1-48

$\delta_{v,2} = 100{,}66\ Fa^3/EI$

8.2.1-49

$\delta_{v,1} = 34{,}916(6)Fa^3/EI = 711{,}316\ Fa^3/Ed^4$

8.2.1-50

$\delta_2 = 57{,}83\ Fa^3/EI$

8.2.1-51

$\delta_{v,1} = 132Fa^3/3EI$

8.2.1-52

$\delta_1 = 5{,}083(3)\ Fa^3/EI$; $\delta_2 = 5{,}3(3)\ Fa^3/EI$

8.2.1-53

$\delta_1 = 28pa^4/EI$

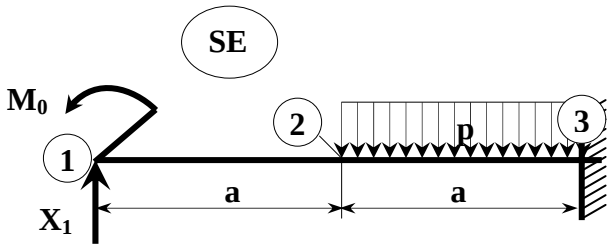
8.2.1-54

$\delta_{h,3} = Fa^3/3EI = 6{,}79\ Fa^3/Ed^4 = \delta_{v,3}$.

8.2.2 Sisteme static nedeterminate

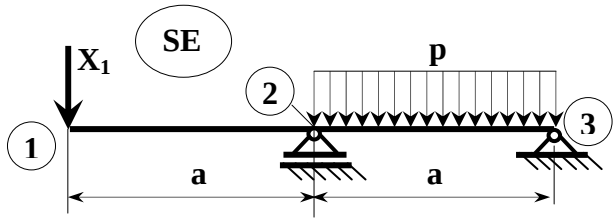
8.2.2-1

a) $X_1 = 3M_0/a + 21pa/496$
b) $\varphi_1 = 0{,}011\text{rad} = 0{,}636°$



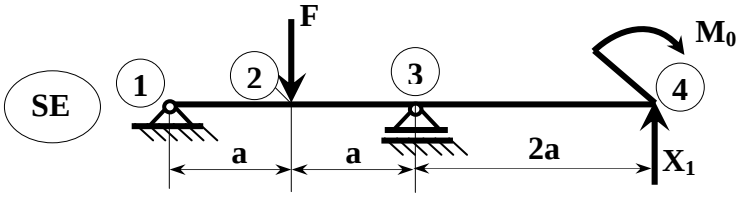
8.2.2-2

a) $X_1 = pa/16 = 6{,}25$ kN
b) $\varphi_3 = pa^3/32EI$



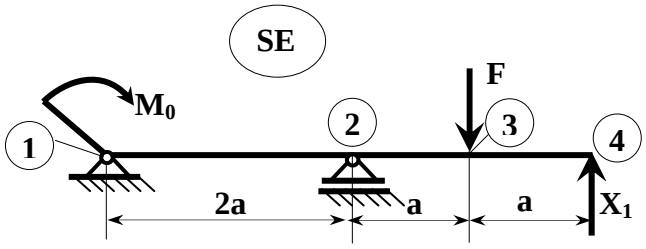
8.2.2-3

$X_1 = 37\ F/32 = 57{,}8125$ kN
$\varphi_1 = 17Fa^2/48EI = 0{,}001526$ rad $= 0{,}0875°$



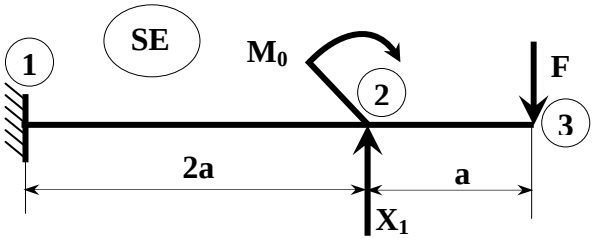
8.2.2-4

$X_1 = 9\ F/32;$
$\delta_3 = 11\ Fa^3/192EI$



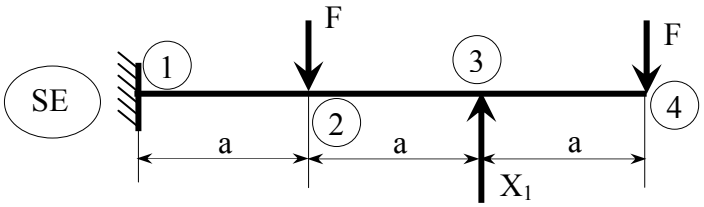
8.2.2-5

$X_1 = 5\ F/2;$
$\delta_3 = 4\ Fa^3/3EI$



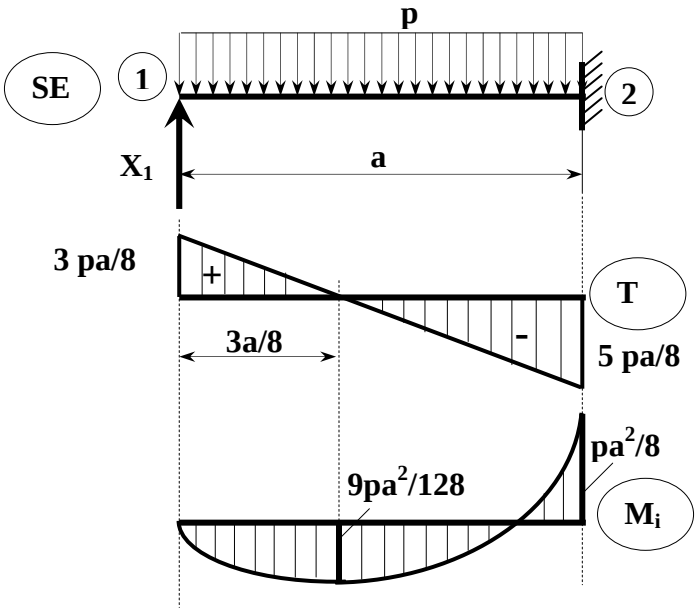
8.2.2-6

X_1= 33 F/16;
δ_4= 17 Fa^3/24EI = 9,86 mm



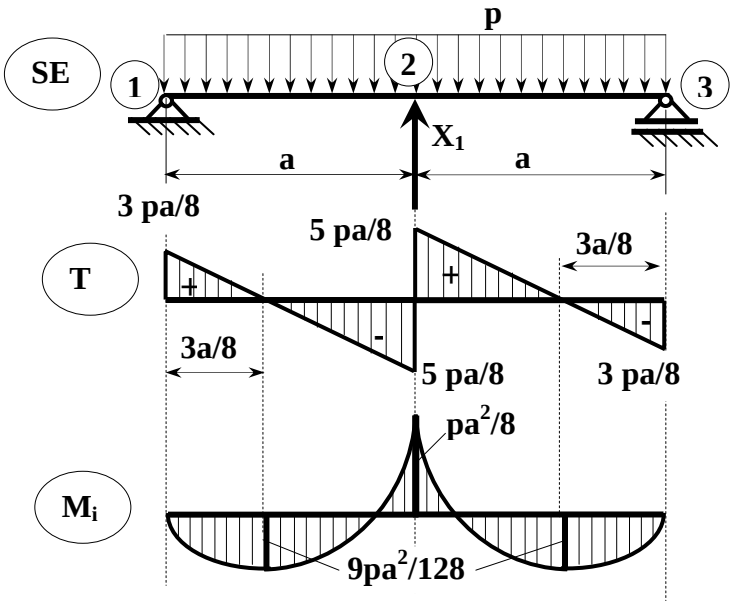
8.2.2-7

X_1= 3 pa/8;



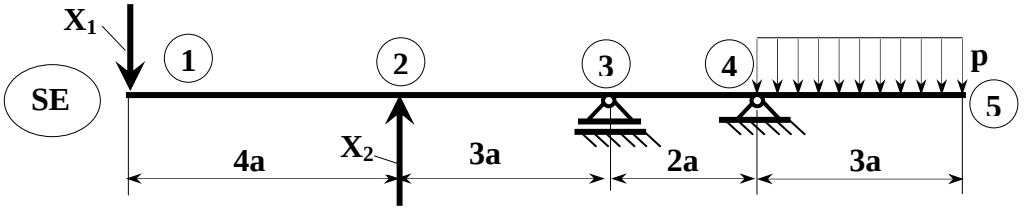
8.2.2-8

X_1= 5 pa/4;



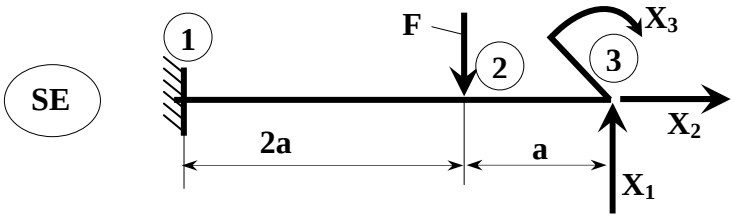
8.2.2-9

X_1= 0,0515 pa; X_2= 0,4408 pa



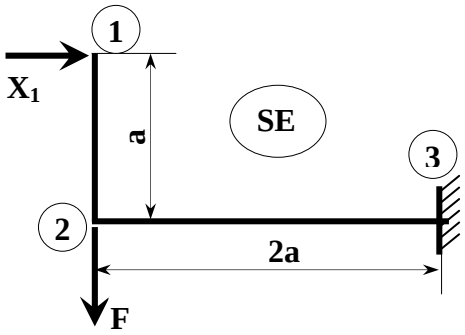
8.2.2-10

X_1= 0,74 F;
X_2= 0;
X_3= 0,4(4) Fa



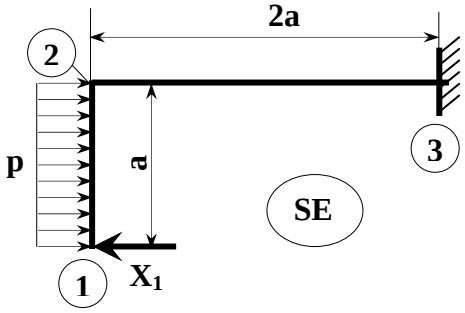
8.2.2-11

X_1= 6 F/7;
δ_1=20 Fa^3/21EI
φ_2=2 Fa^2/7EI



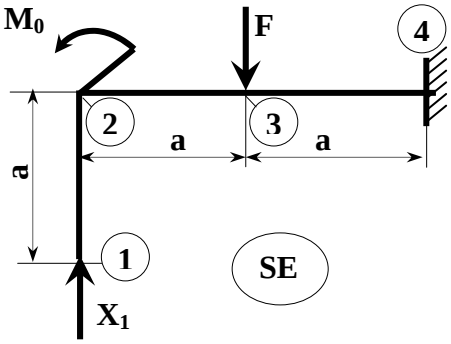
8.2.2-12

X_1= 27 pa/56;
φ_2= pa^3/28EI, în sens antiorar



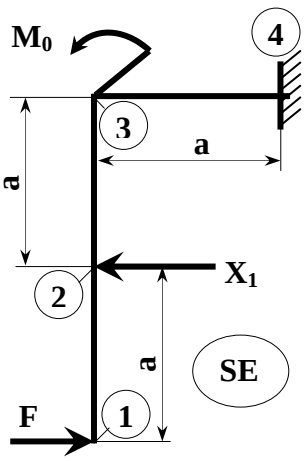
8.2.2-13

X_1= 13 F/16;
δ_1= Fa^3/8EI, spre stânga



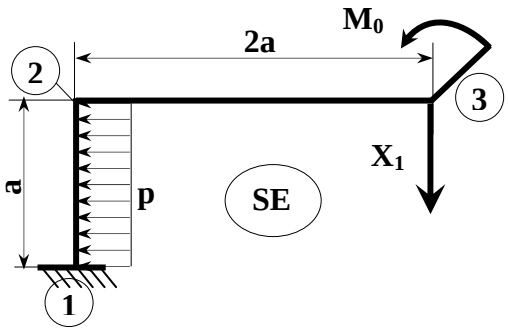
8.2.2-14

X_1= 3,375 F;
δ_1=0,4375 Fa^3/EI
φ_2=0,292 Fa^2/EI



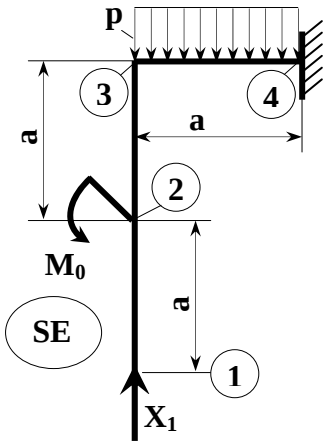
8.2.2-15

X_1= 7 pa/20
φ_2= pa^3/30EI, în sens orar



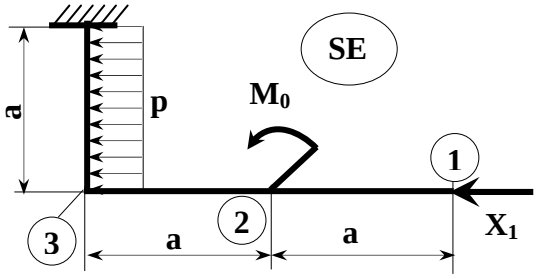
8.2.2-16

X_1= 9 pa/8;
φ_2=0,4583 pa^3/EI



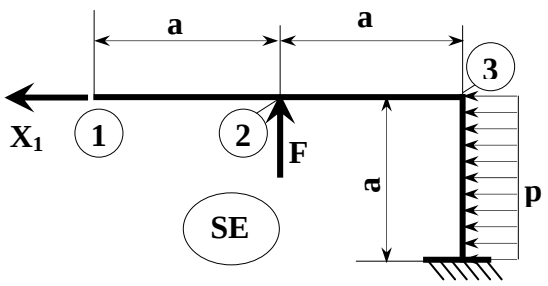
8.2.2-17

X_1= 0,375 pa;
φ_3= 7 pa^3/48EI



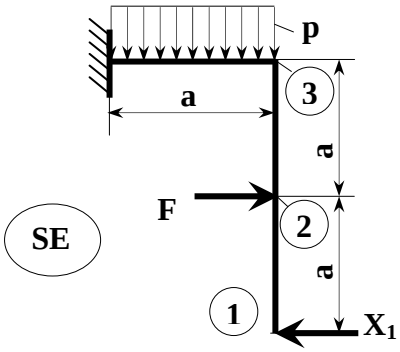
8.2.2-18

X_1= 1,125 pa;
φ_3= 43 pa^3/24EI,
în sens antiorar



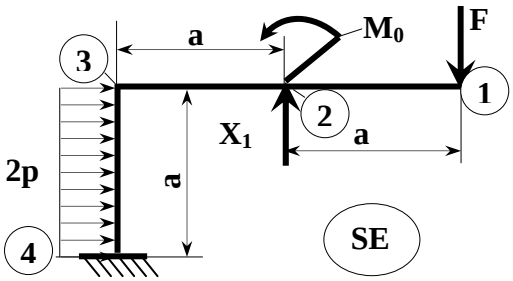
8.2.2-19

X_1= 0,575 pa;
φ_3= 0,35 pa^3/EI,
în sens antiorar



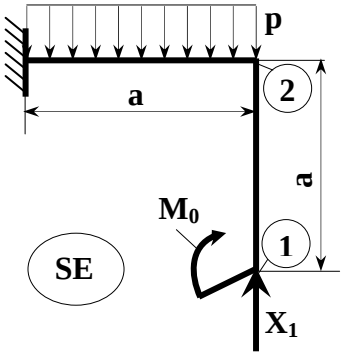
8.2.2-20

X_1= 1,5 pa;
φ_3= pa^3/6EI, în sens orar



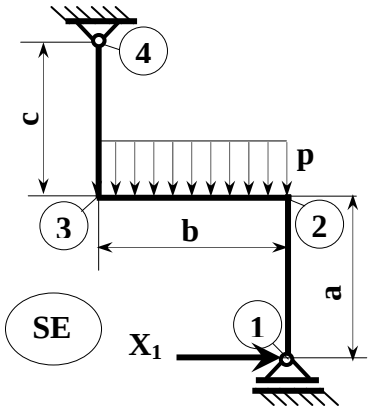
8.2.2-21

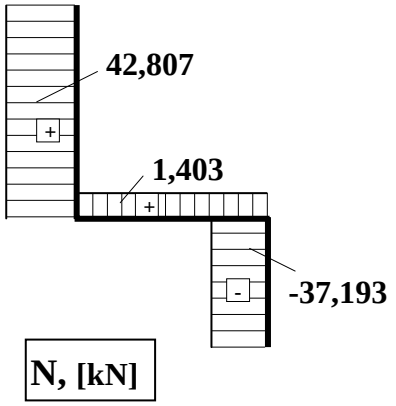
X_1=6,375 pa;
φ_3= 5,146 pa^3/EI, în sens orar

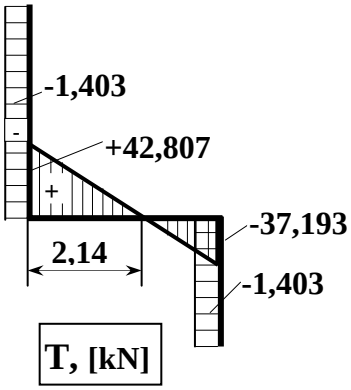


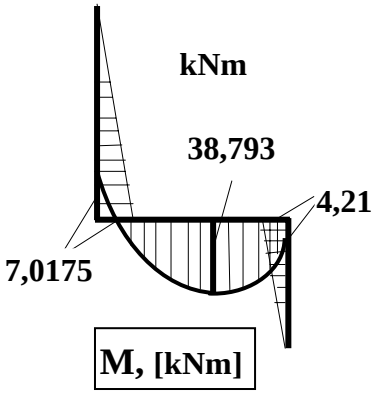
8.2.2-22

X_1= 1403 N;



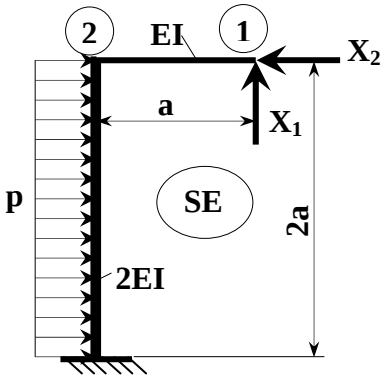


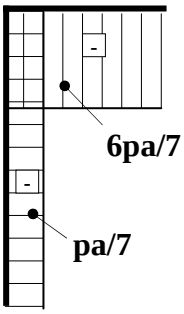


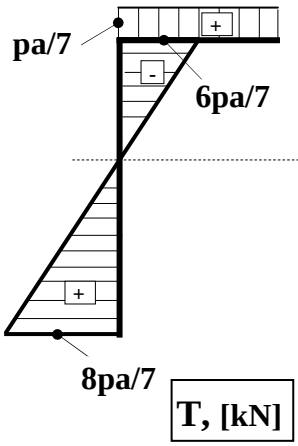


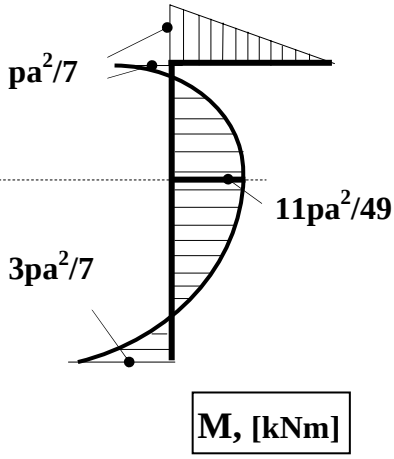
8.2.2-23

X_1= -0,1428 pa;
X_2= 0,857 pa,
$\delta_2 = 0$
$\varphi_2 = pa^3/21EI$



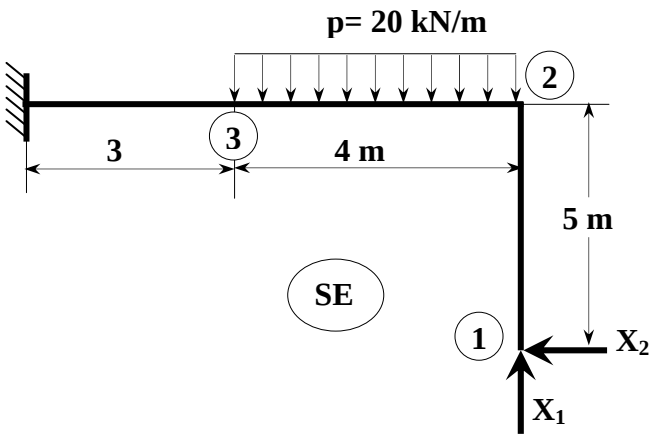


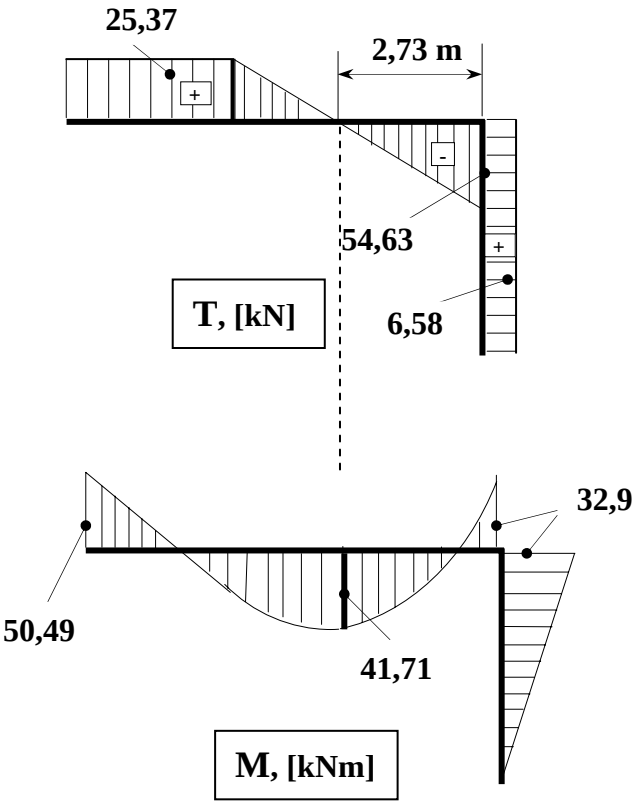


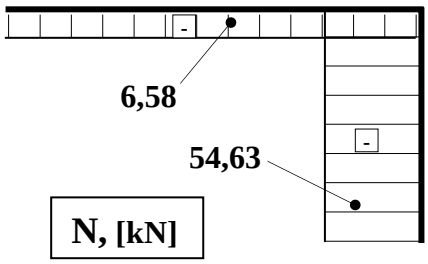


8.2.2-24

X_1= -0,1428 pa;
X_2= 0,857 pa,

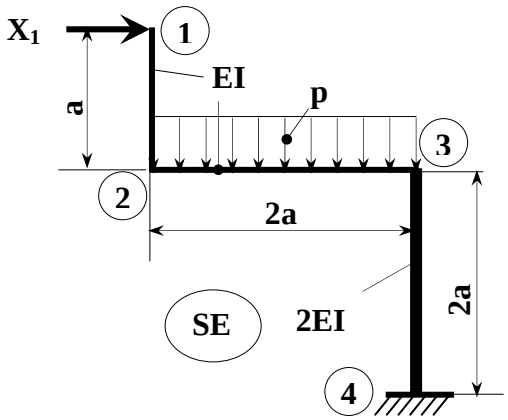


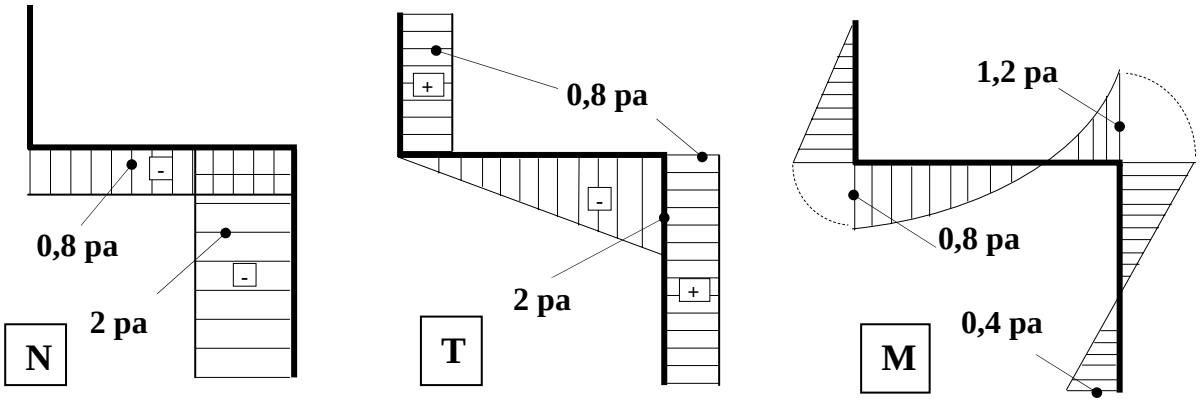




8.2.2-25

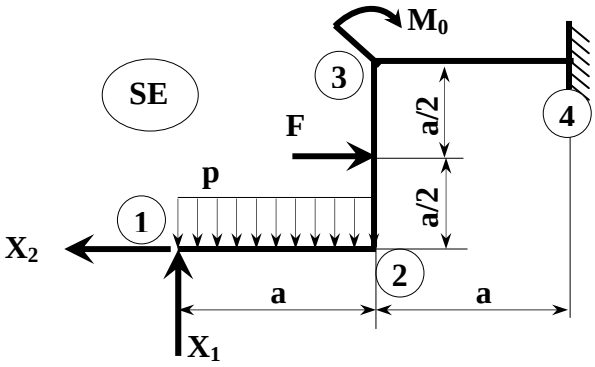
X_1= 4 pa/5
δ_1= 16 pa^4/5EI





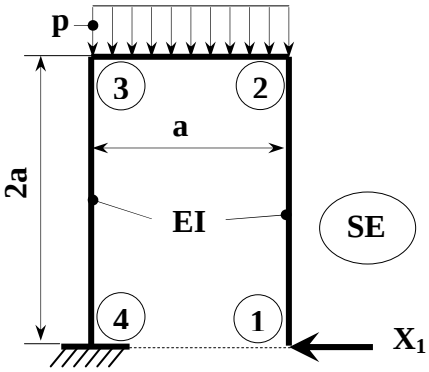
8.2.2-26

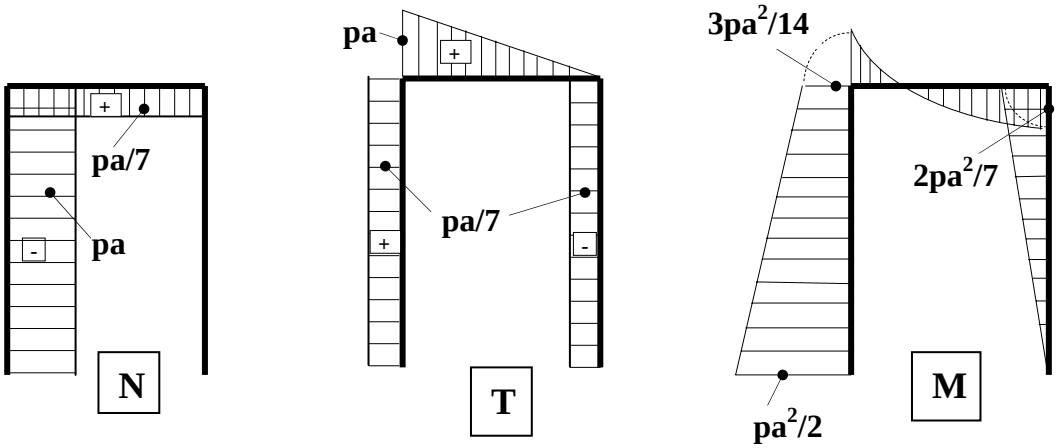
$X_1 = 0{,}125$ pa
$X_2 = 2{,}156$ pa



8.2.2-27

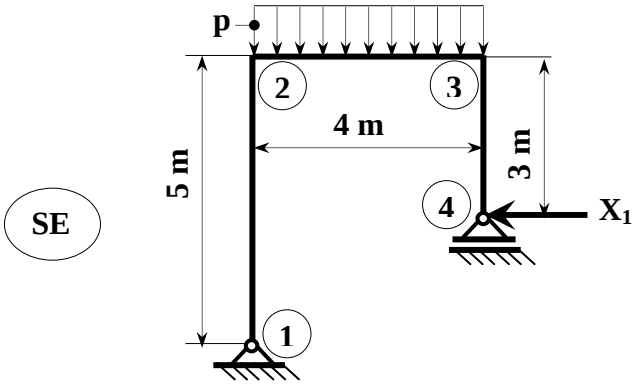
$X_1 = pa/7$
$\delta_1 = 39\ pa^4/56EI$
$\varphi_1 = 13\ pa^3/42EI$

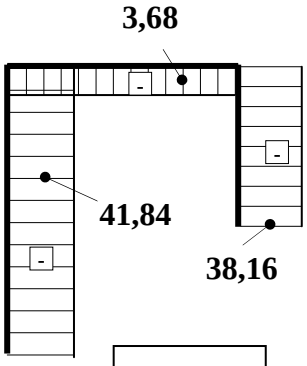




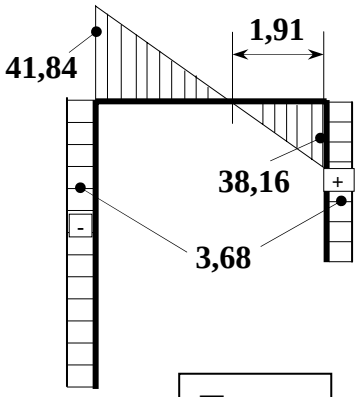
8.2.2-28

$X_1 = 3{,}68$ kN

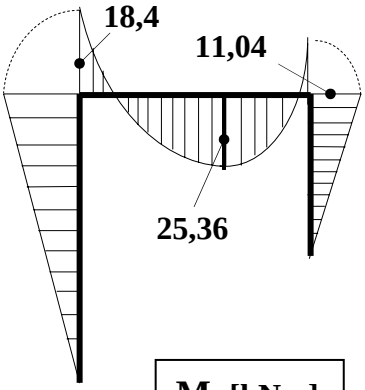




N, [kN]



T, [kN]



M, [kNm]

8.2.2-29

$X_1 = 0{,}18$ F; $X_2 = 1{,}32$ F

$\delta_1 = 0{,}0717\ Fa^3/EI$

$\varphi_1 = 0{,}185\ Fa^2/EI$

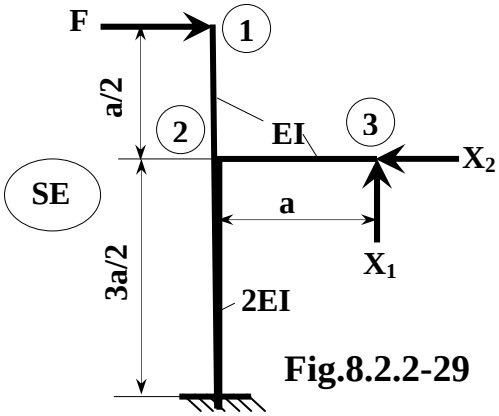
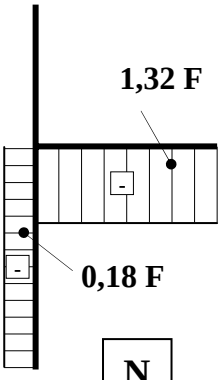
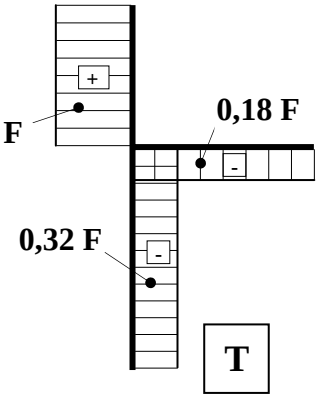


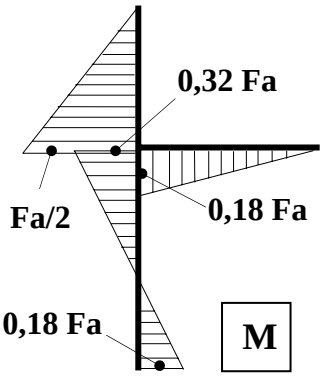
Fig.8.2.2-29



N



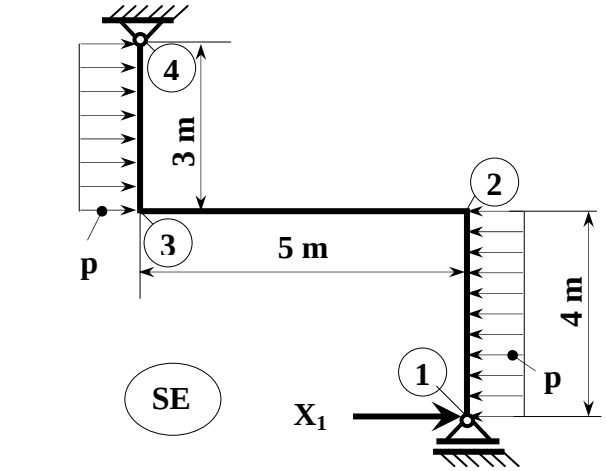
T

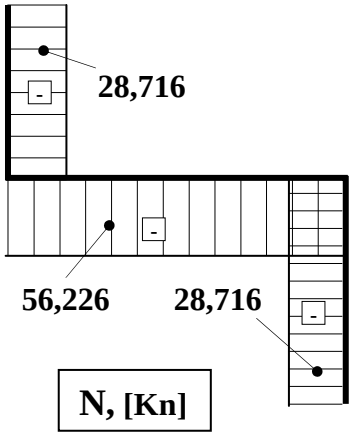


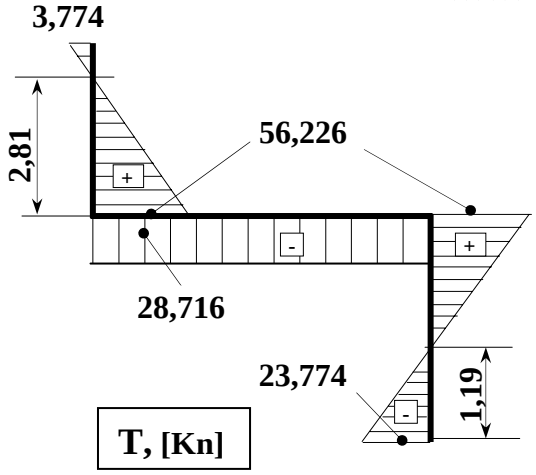
M

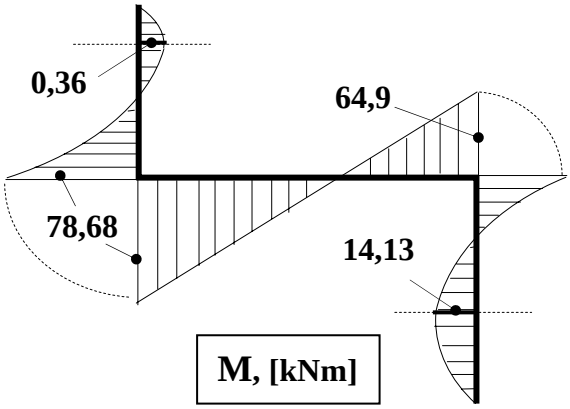
8.2.2-30

X_1= 23,774 kN



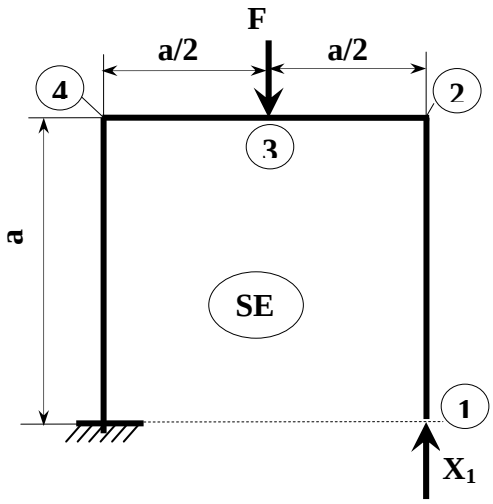


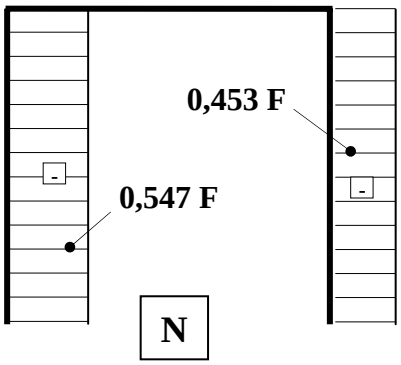


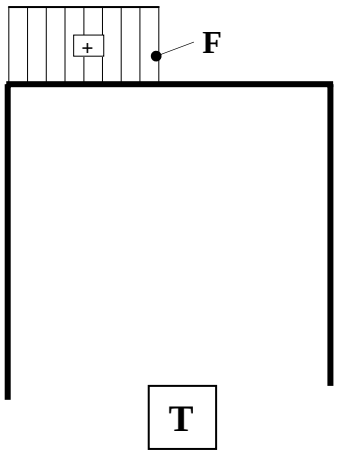


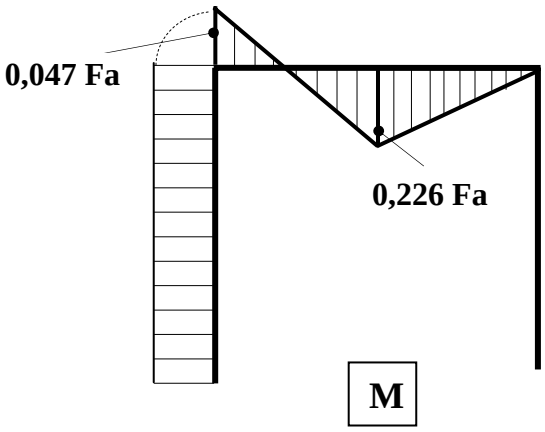
8.2.2-31

$X_1 = 29\ F/\ 64$



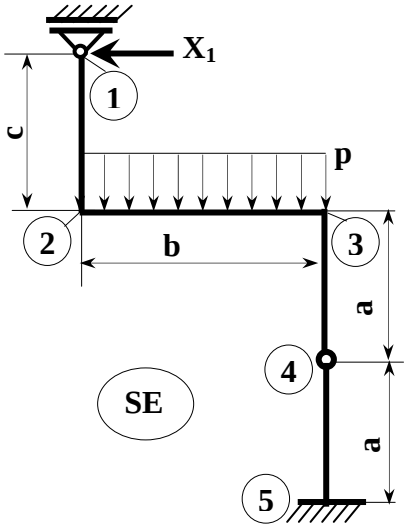


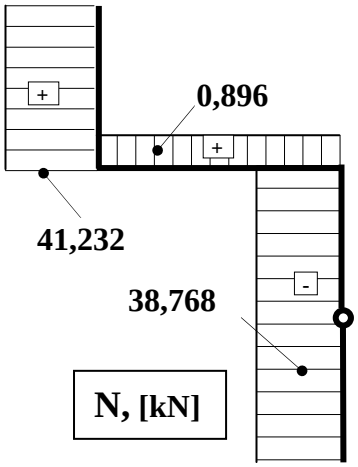


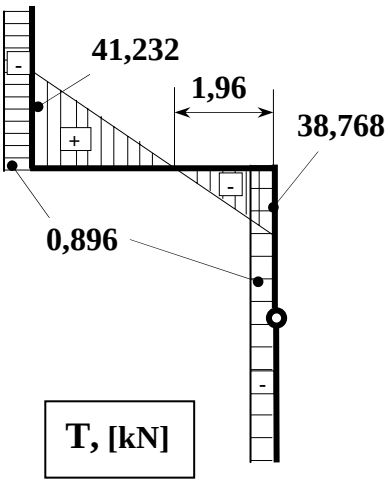


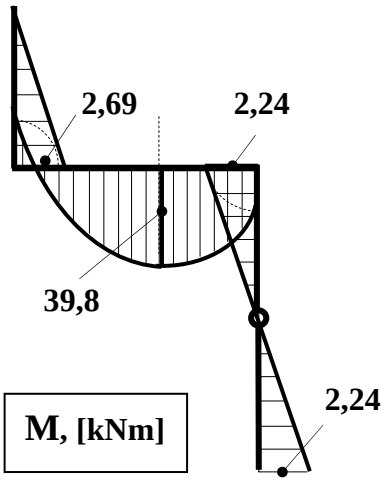
8.2.2-32

$X_1 = 896$ N



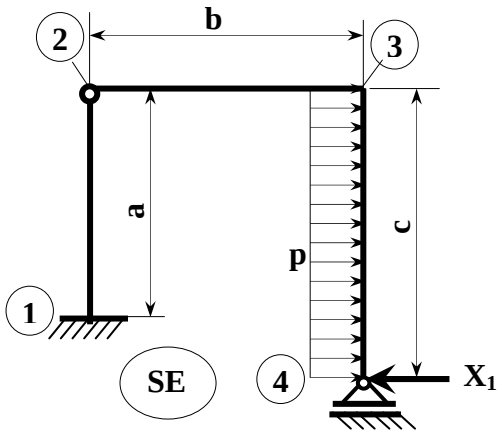


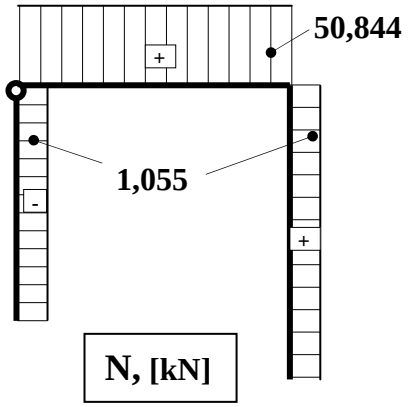


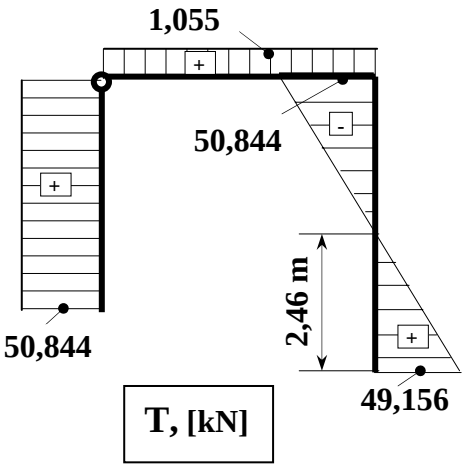


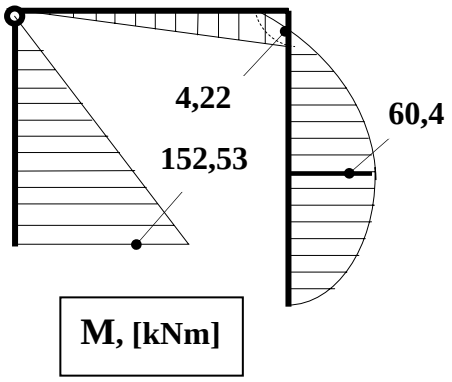
8.2.2-33

$X_1 = 49{,}156$ kN



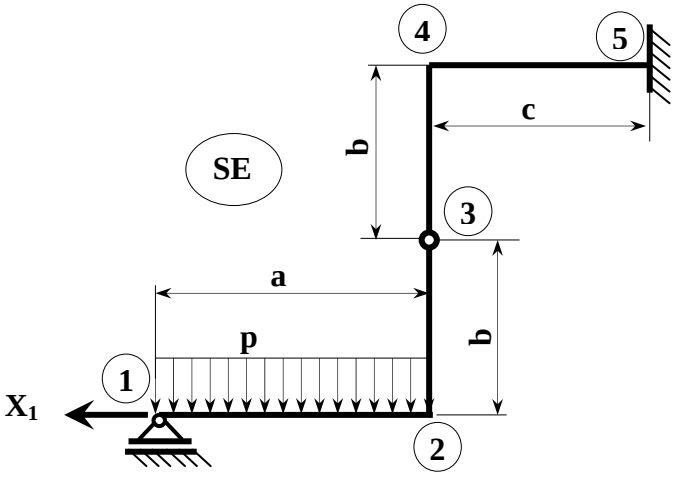


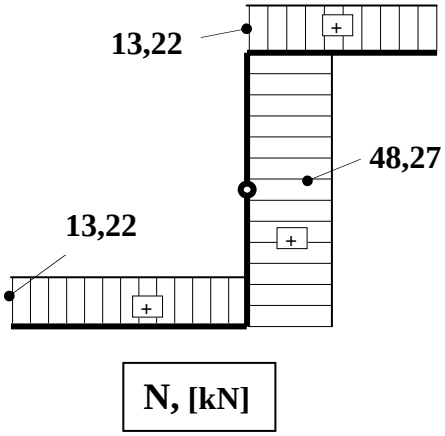


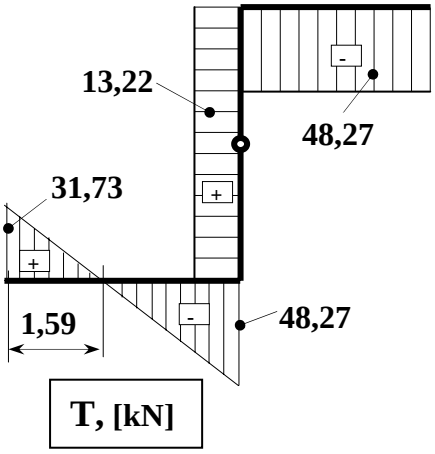


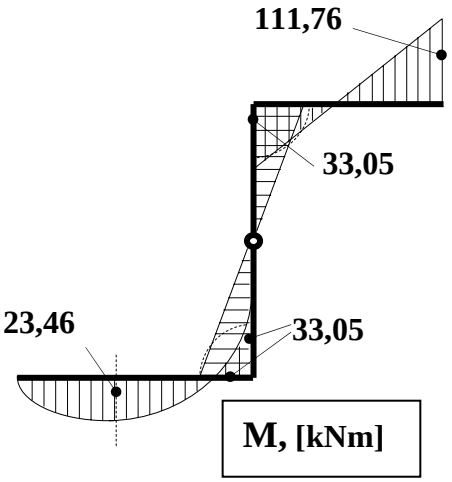
8.2.2-34

$X_1 = 13{,}228$ kN



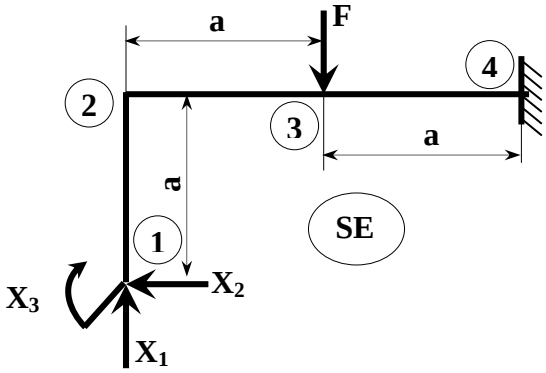


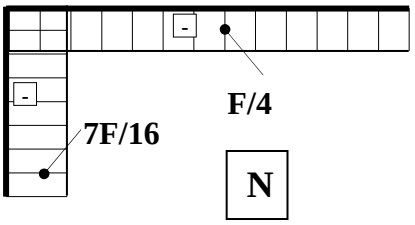


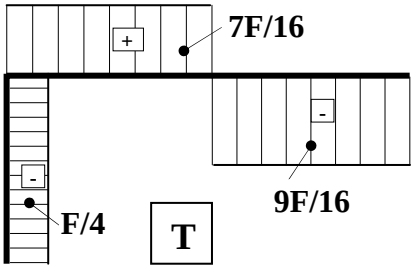


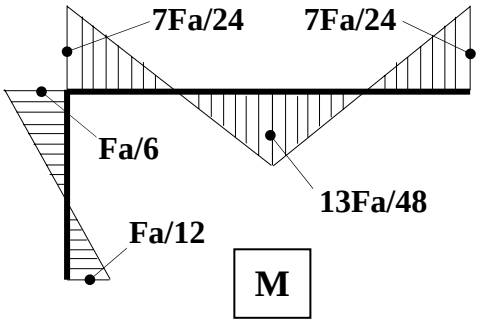
8.2.2-35

$X_1 = 7F/16$; $X_2 = -F/4$; $X_3 = -Fa/12$;



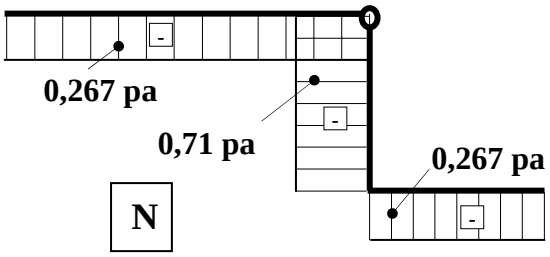


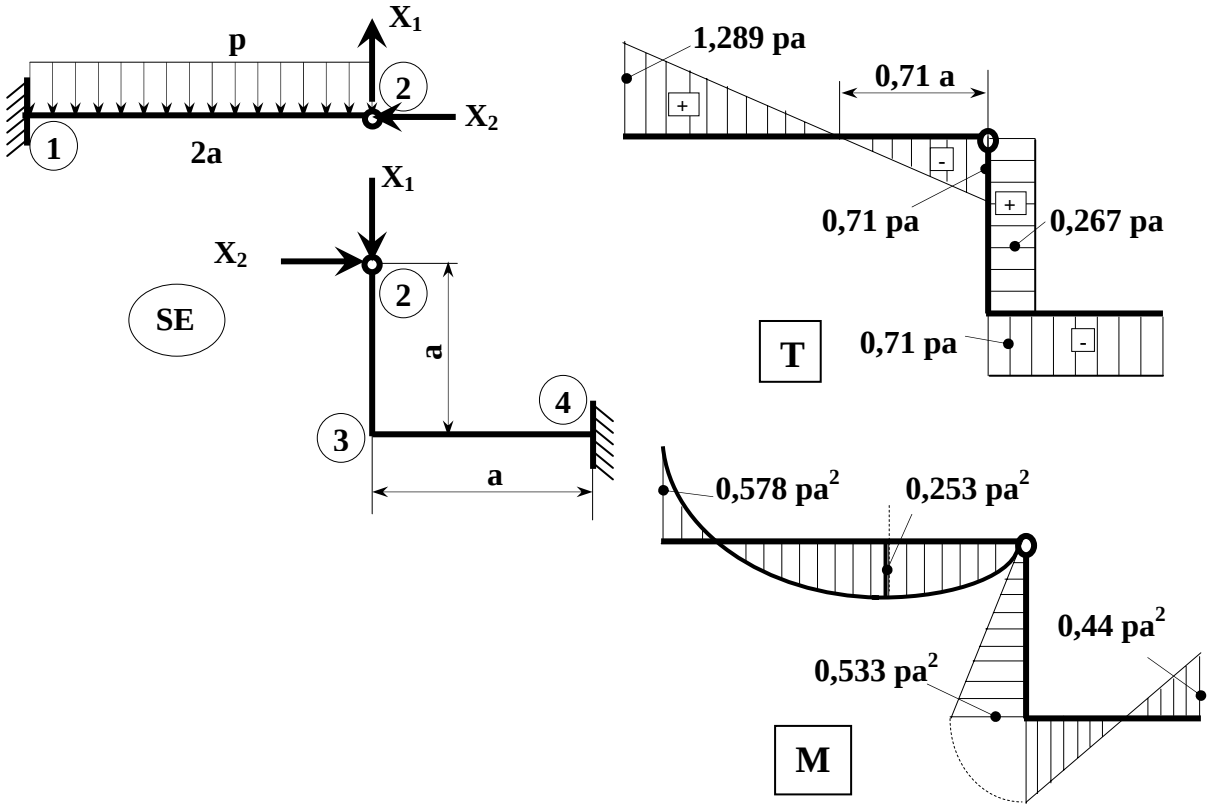




8.2.2-36

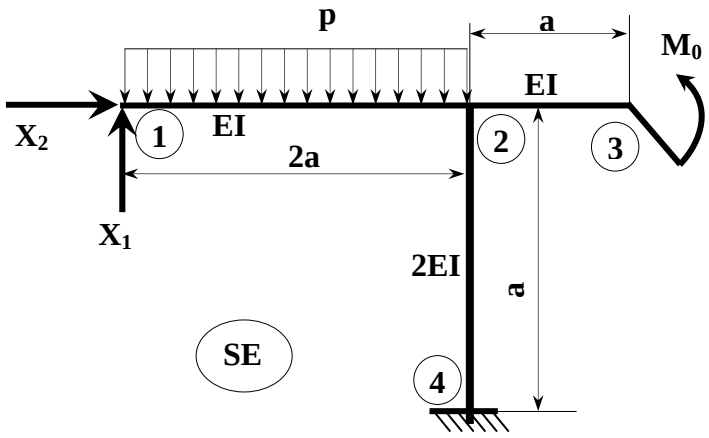
$X_1 = 32\ pa/45$;
$X_2 = 4\ pa/15$;

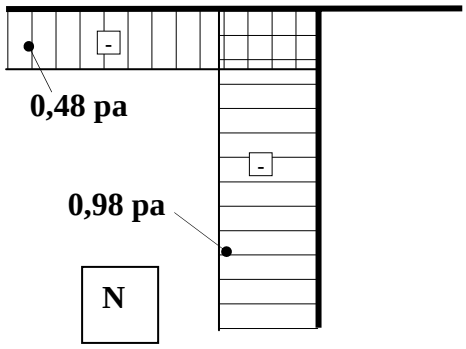


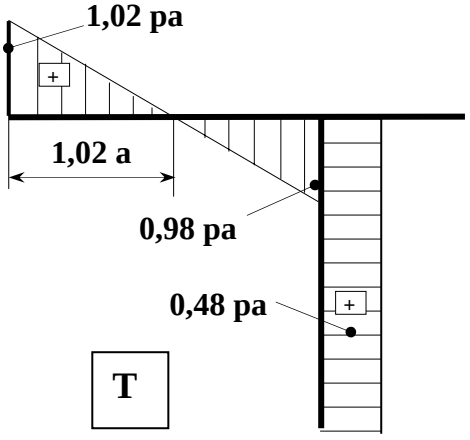


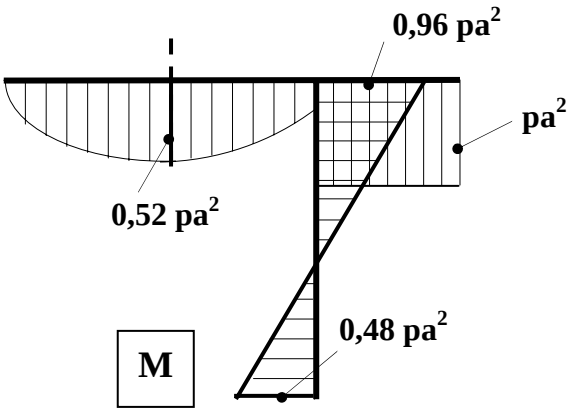
8.2.2-37

$X_1 = 1{,}02$ pa
$X_2 = 0{,}48$ pa





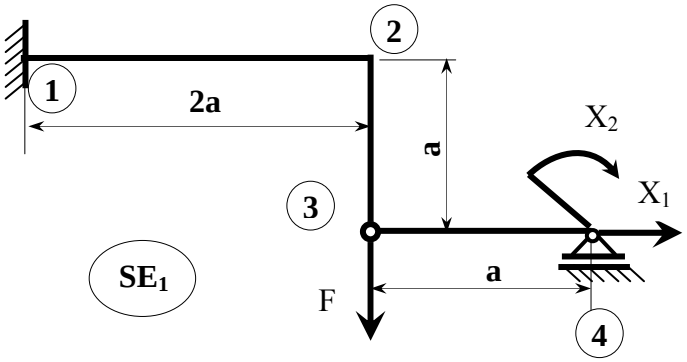




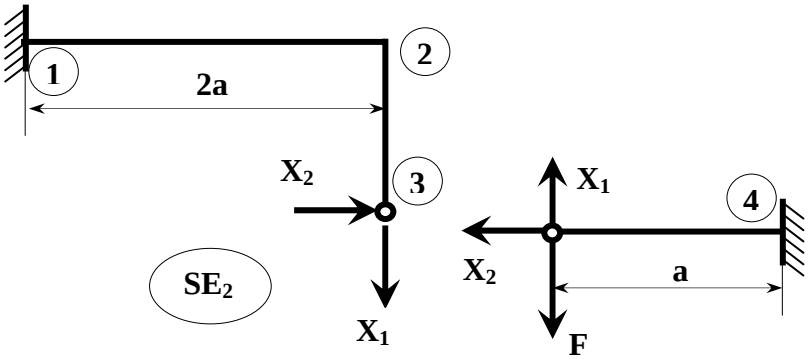
8.2.2-38

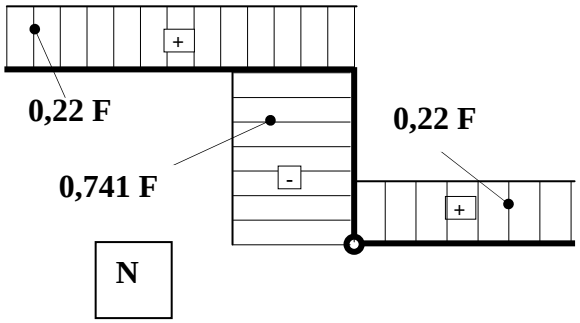
$\delta_3 = 0{,}2484\ Fa^3/\ EI$

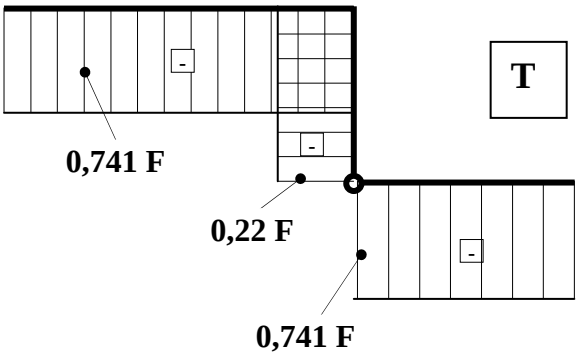
Pentru SE_1:
$X_1 = 0{,}2(2)\ F$
$X_2 = 0{,}741\ Fa$

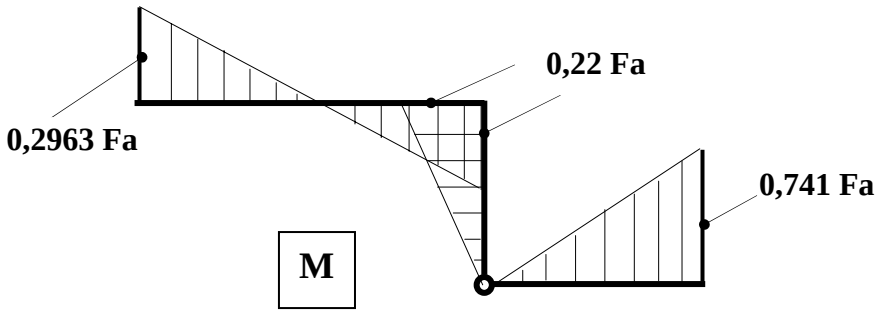


Pentru SE_2:
$X_1 = 0{,}259\ F$
$X_2 = 0{,}2(2)\ F$

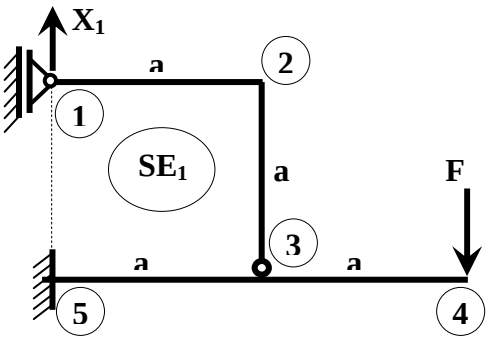


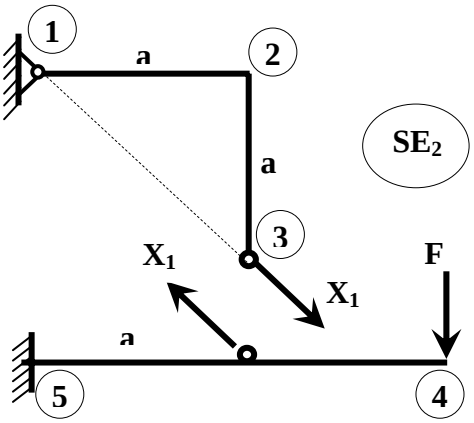




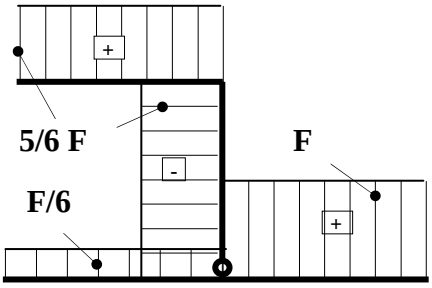


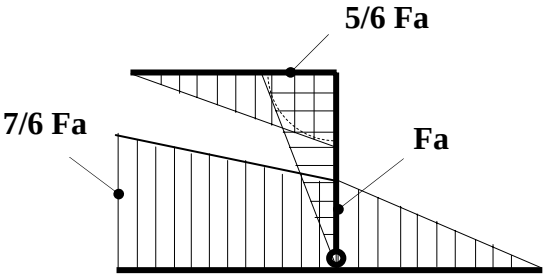
8.2.2-39





Pentru SE_1: $X_1 = 0{,}83(3)\ F$; Pentru SE_2: $X_1 = 1{,}1785\ F$;



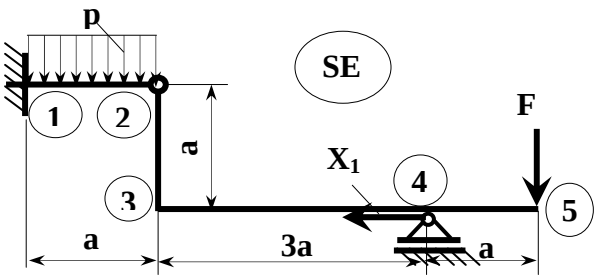


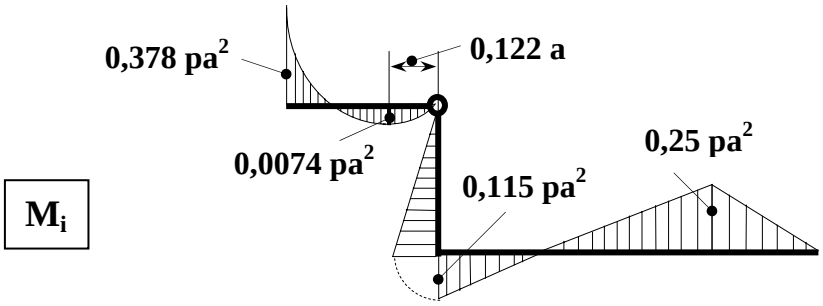
T M_i

8.2.2-40

$X_1 = 0{,}115\ pa$

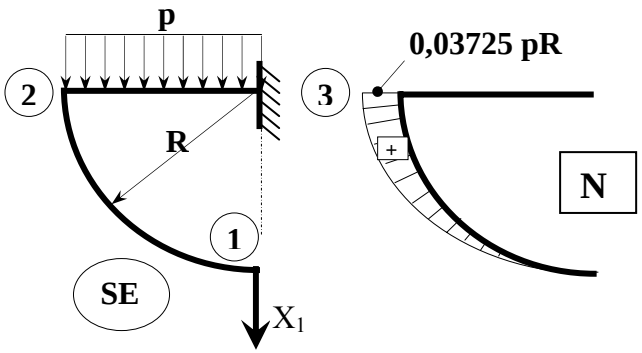
$\delta_3 = 0{,}084\ pa^4 / EI$

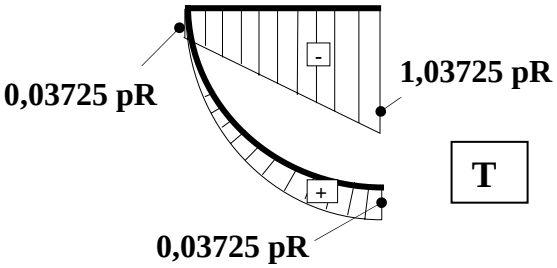


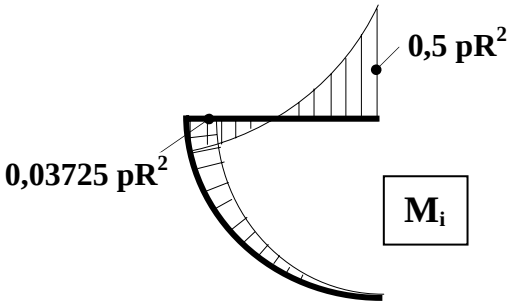


8.2.2-41

X_1 =0,03725 pR
= 5,364 N
δ_3 = 0,119 pR^4/EI
= 0,00866 mm

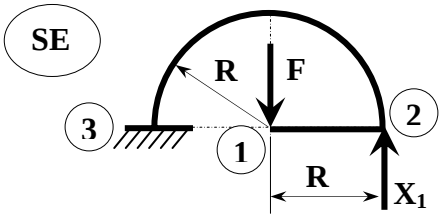






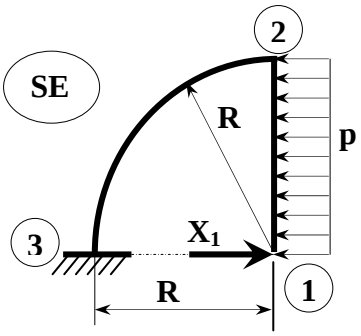
8.2.2-42

$X_1 = F/3 = 533,3(3)$ N
$\delta_3 = 1,38\ FR^3/EI = 1,116$ mm



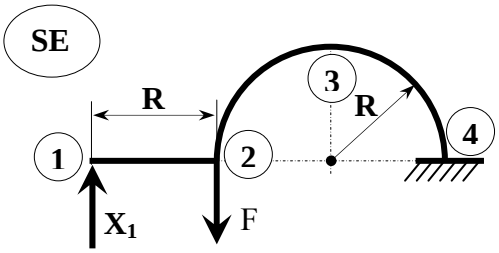
8.2.2-43

$X_1 = 0,3668$ pR
$\delta_3 = 0,1834\ pR^4/EI$



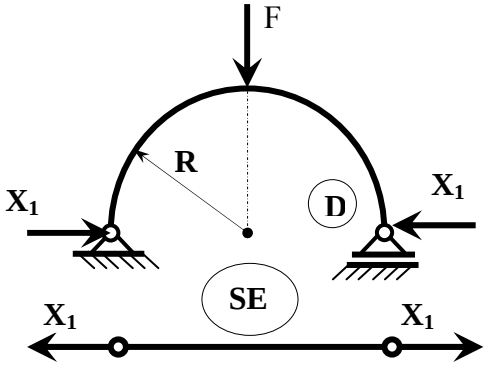
8.2.2-44

$X_1 = 0{,}54\ F$
$\varphi_3 = 0{,}334\ FR^2/EI$



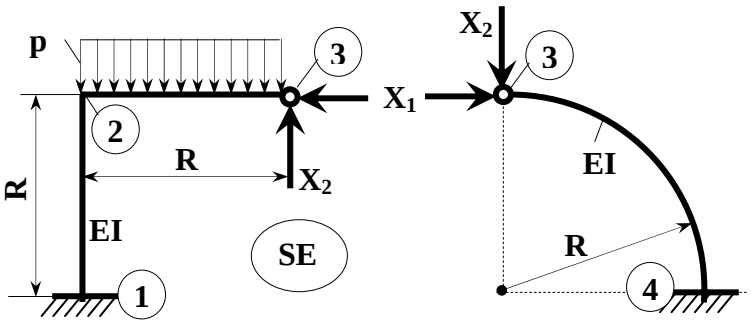
8.2.2-45

$X_1 = 0{,}318\ F = 25{,}44\ kN$
$\delta_D = 0{,}274\ mm$



8.2.2-46

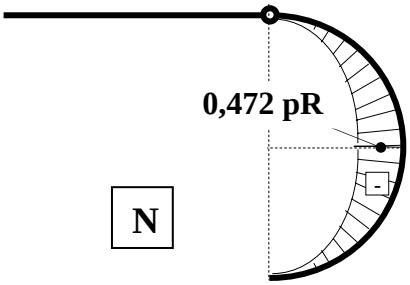
$X_1 = 0{,}363\ pR$
$X_2 = 0{,}295\ pR$

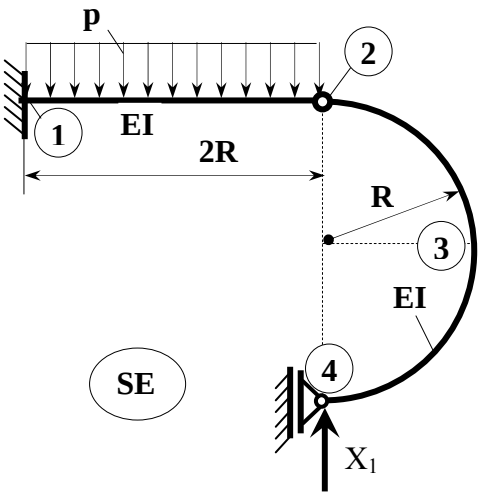


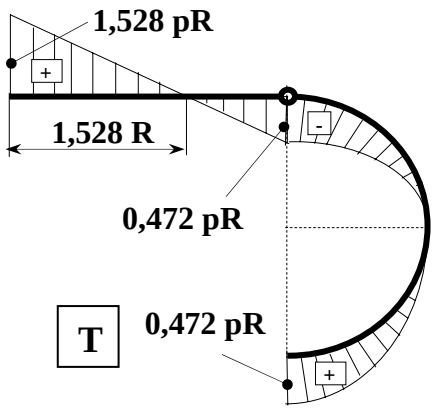
$\varphi_2 = 8{,}5 \cdot 10^{+3}\ pR^3/EI$

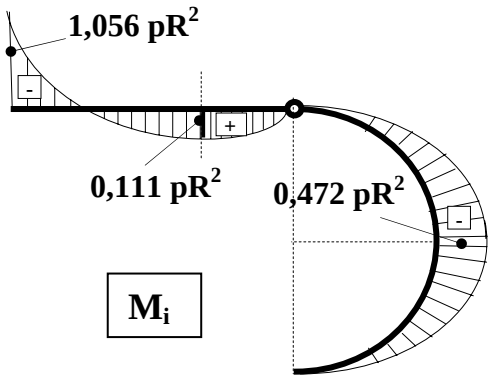
8.2.2-47

$X_1 = 0{,}472\ pR$





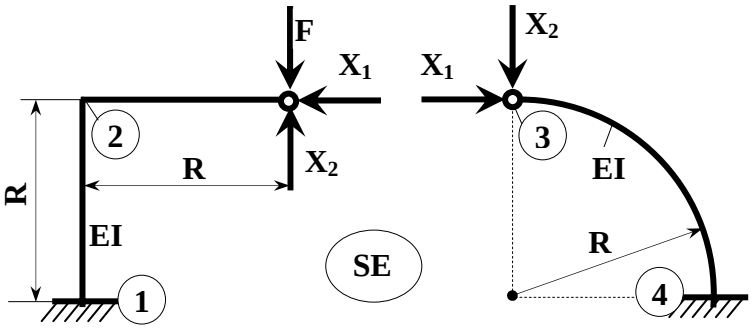




8.2.2-48

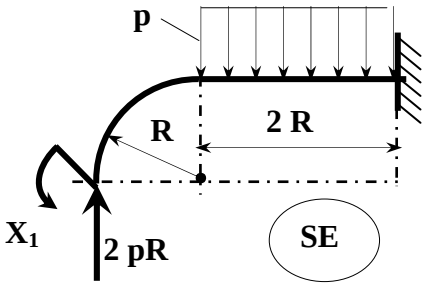
$X_1 = 0{,}725\ pR$
$X_2 = 0{,}629\ pR$

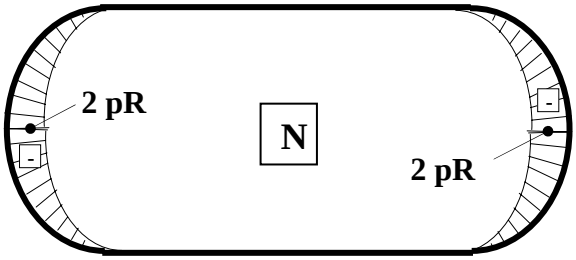
$\delta_{3,H} = 0{,}056\ pR^3/EI$
$\delta_{3,V} = 0{,}132\ pR^3/EI$
$\delta_3 = 0{,}143\ pR^3/EI$

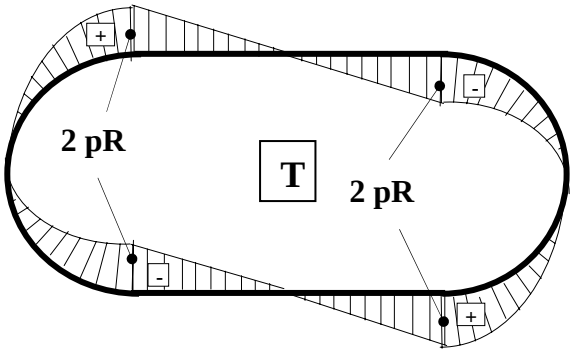


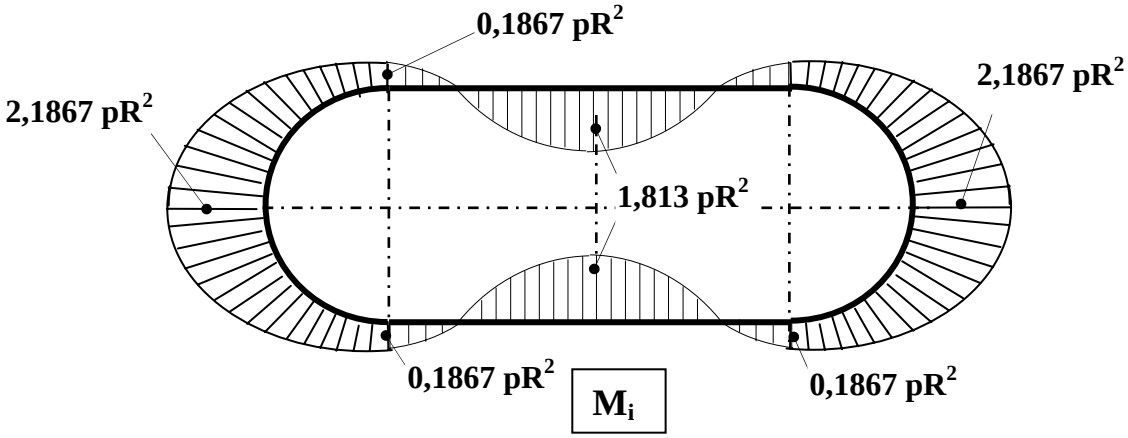
8.2.2-49

$X_1 = 2{,}1867\ pR^2$

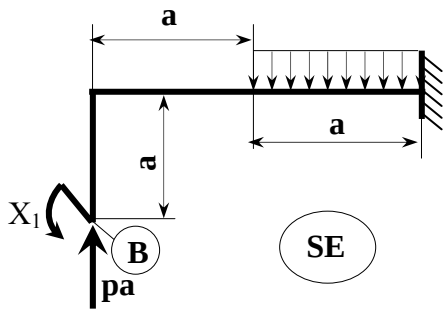






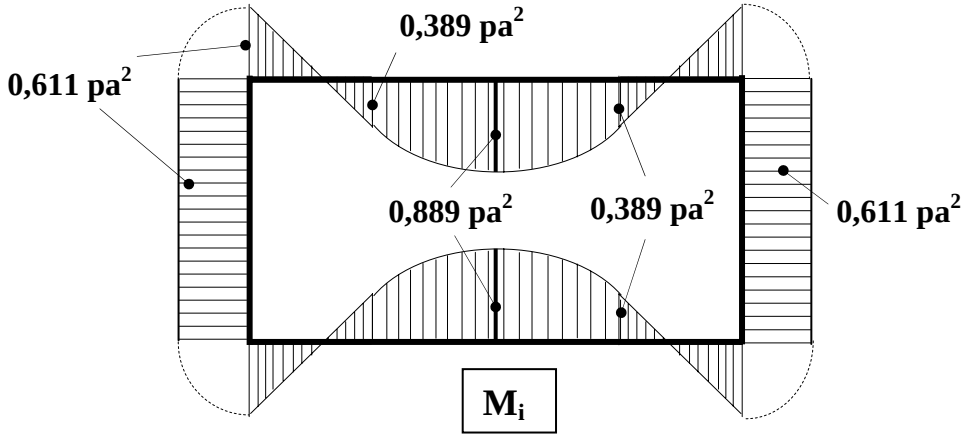


8.2.2-50

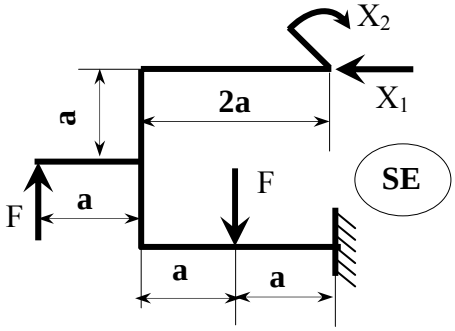


$X_1 = 0{,}61(1)\ pa^2$

$\Delta_{BC} = 11\ pa^4 / 18\ EI$

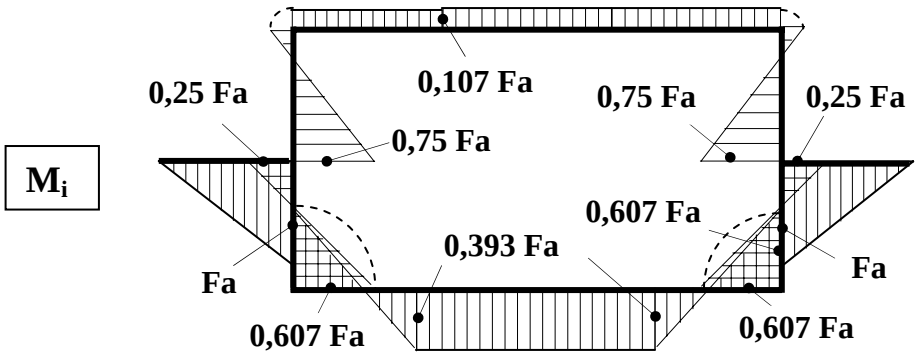


8.2.2-51



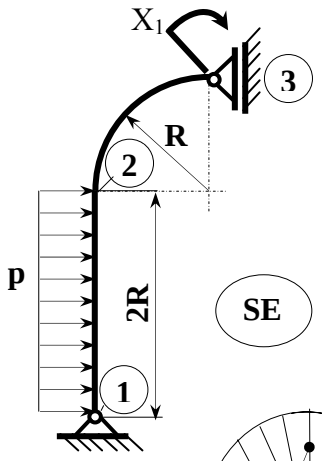
$X_1 = 6\ F/7$

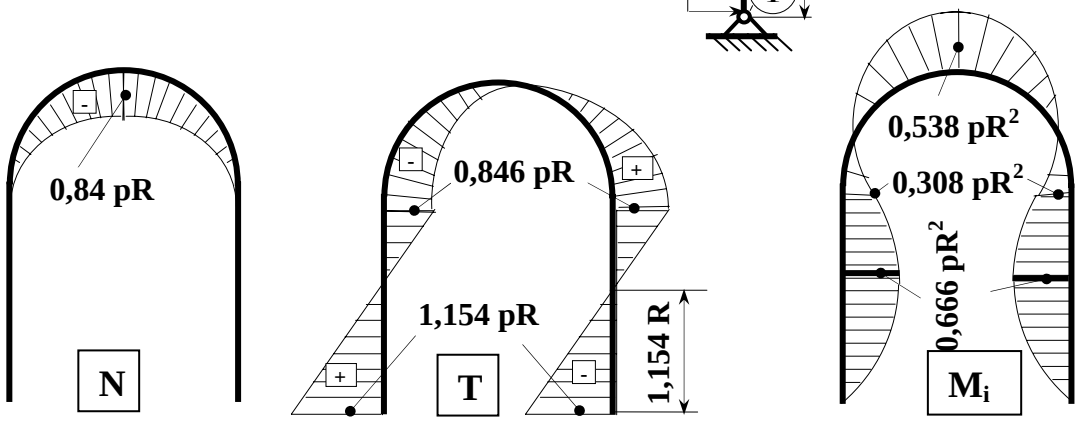
$X_2 = 3\ Fa/28$



8.2.2-52

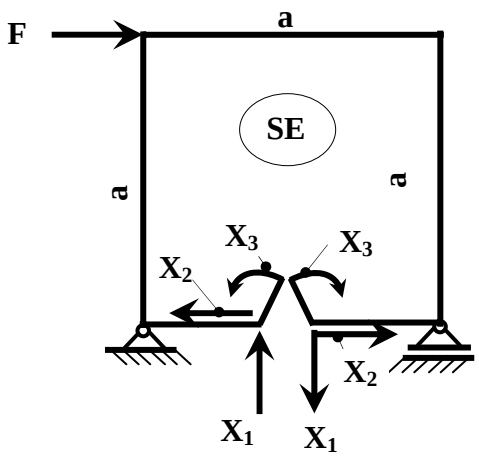
$X_1 = 0{,}5372\ pR^2$
$\delta_3 = 0{,}2469\ pR^4/EI$

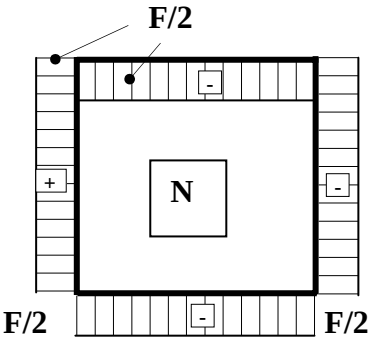


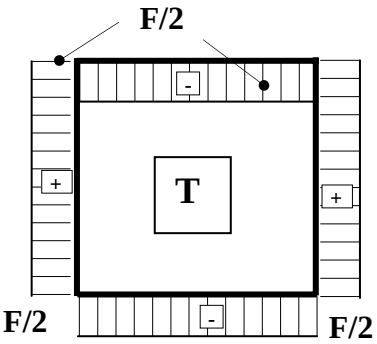


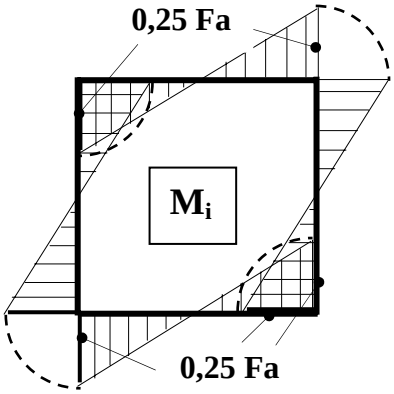
8.2.2-53

$X_1 = 0{,}5\ F$
$X_1 = 0{,}5\ F$
$X_1 = 0$



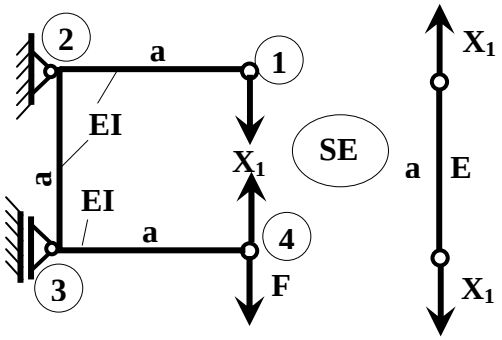






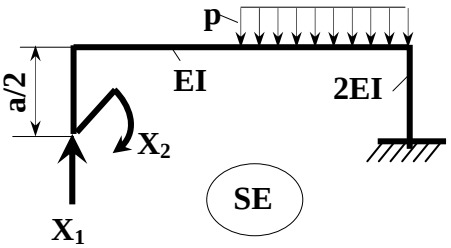
8.2.2-54

$X_1 = 0{,}4672\ F$
$\Delta_{1\text{-}4} = 0{,}794$ mm



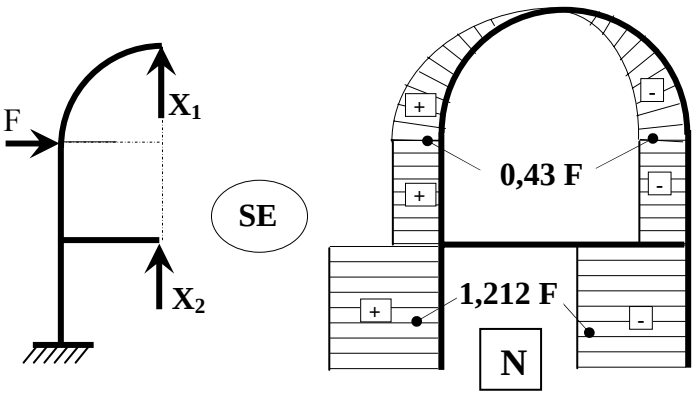
8.2.2-55

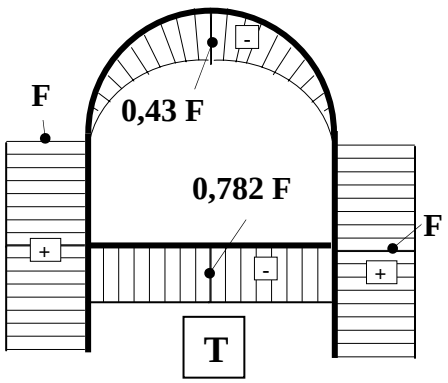
$X_1 = 0{,}225\ pa$
$X_2 = 0{,}0861\ pa^2$
$M_{i,max} = 0{,}1383\ pa^2$
$\Delta_{B\text{-}C} = 0{,}05(5)\ pa^4/EI$

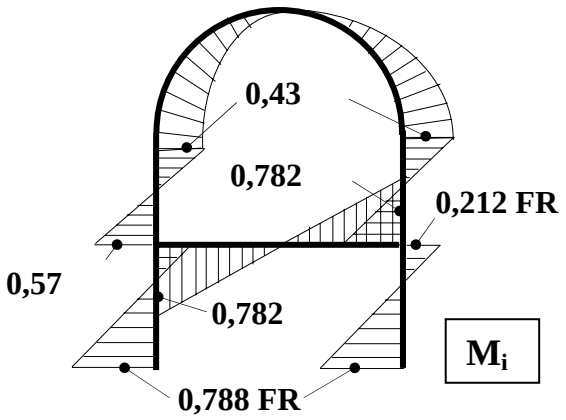


8.2.2-56

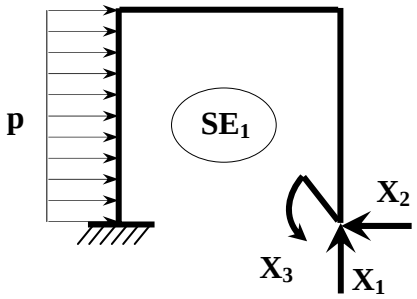
$X_1 = 0{,}43\ F$
$X_2 = 0{,}782\ F$





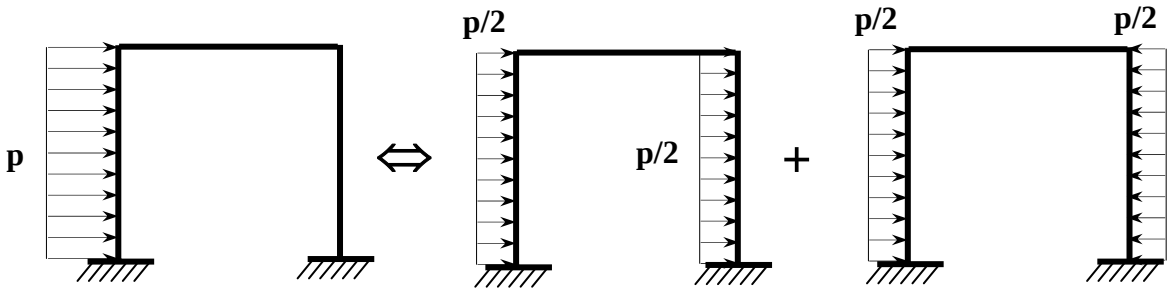


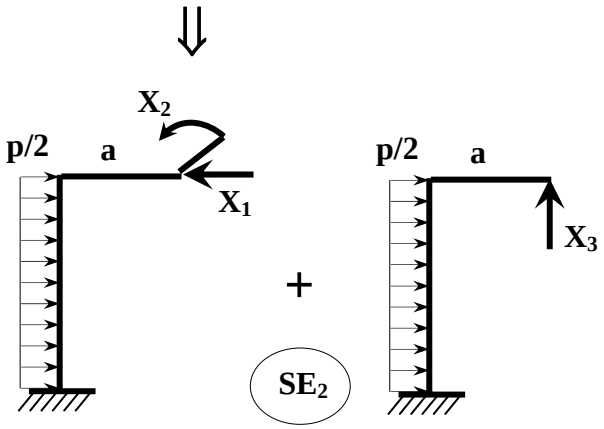
8.2.2-57



Pentru SE_1:
$X_1 = 2\ pa/7$
$X_2 = 5\ pa/12$
$X_3 = 0{,}492\ pa^2$

Sistemul dat poate fi înlocuit cu două sisteme mai simple, unul simetric şi celălalt antisimetric, care se pot rezolva mai simplu, SE_2.



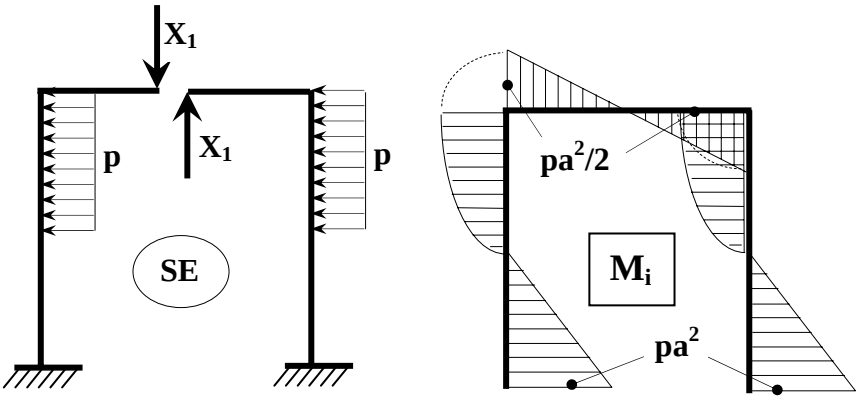


Pentru SE_2:
$X_1 = 5\ pa/12$
$X_2 = -\ pa^2/18$
$X_3 = 2\ pa/7$

$M_{i,max} = 0{,}9365\ pa^2$

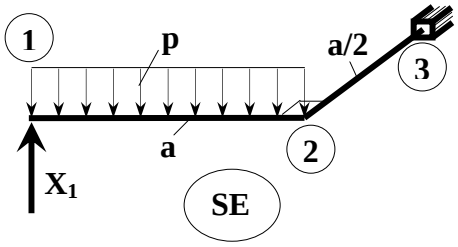
8.2.2-58

$X_1 = pa/2$
$\delta_3 = pa^2/2$



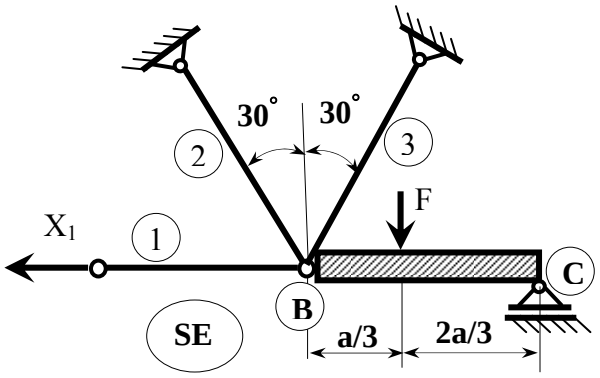
8.2.2-59

$X_1 = 0{,}96\ pa$
$\delta_2 = 0{,}3467\ pa^4/EI = 7{,}072\ pa^4/Ed^4$



8.2.2-60

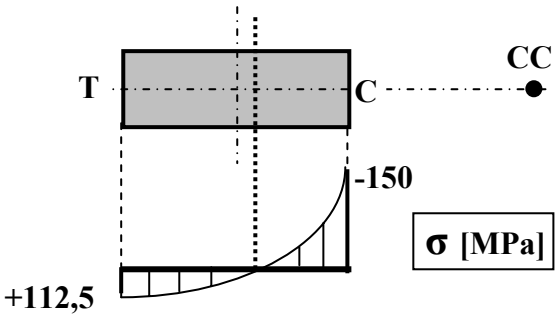
$N_1 = 0{,}154\ F$
$N_2 = 0{,}231\ F$
$N_2 = 0{,}539\ F$



8.3 Calculul de rezistență al barelor curbe plane

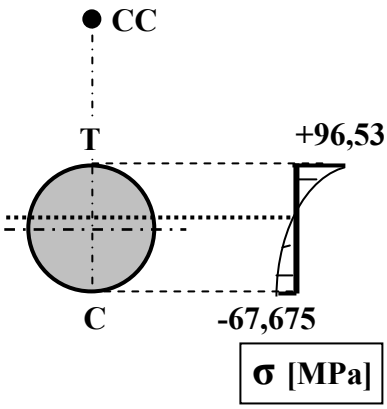
8.3-1

a) $N = -F$, $M_i = 280F$, $e \approx 1{,}9$ mm, $y_T = 41{,}9$ mm, $r_T = 320$ mm, $y_C = 38{,}1$ mm, $r_C = 240$ mm, $F_{cap} = 19{,}677$ kN
b) $\sigma_{max,t} = +112{,}5$ MPa



8.3-2

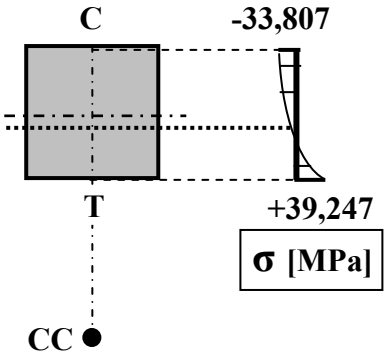
a) $N = +F$, $M_i = 2FR$, $e \approx 2$ mm, $y_T = 38$ mm, $r_T = 160$ mm, $y_C = 42$ mm, $r_C = 240$ mm, $\sigma_{max,t} = +96{,}53$ MPa, $\sigma_{max,c} = -67{,}675$ MPa
b)



8.3-3

a) N = + F, M_i = FR, e ≈ 0,67 mm, y_T = 18,33 mm, r_T = 180 mm, y_C = 20,67 mm, r_C = 220 mm, $\sigma_{max,t}$ = +39,247 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -33,807 MPa

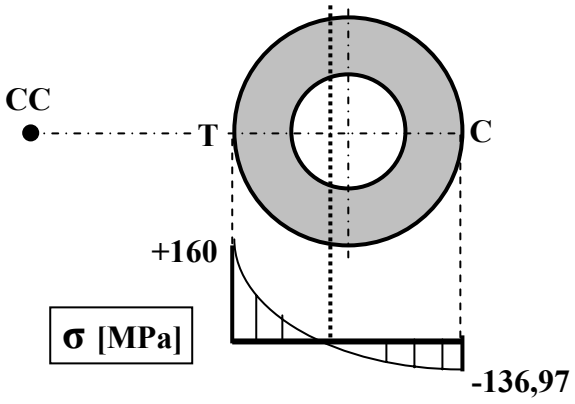
b)



8.3-4

a) N = + F, M_i = 3FR, e ≈ 0,27 mm, y_T = 28,73 mm, r_T = 270 mm, y_C = 30,27 mm, r_C = 330 mm, F_{cap} = 0,7 kN

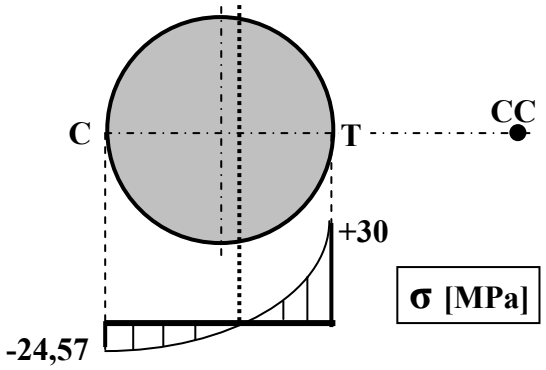
b) $\sigma_{max,c}$ = -136,97 MPa



8.3-5

a) N = + F, M_i = FR, e ≈ 1,5 mm, y_T = 13,5 mm, r_T = 135 mm, y_C = 16,5 mm, r_C = 165 mm, F_{cap} = 1,927 kN

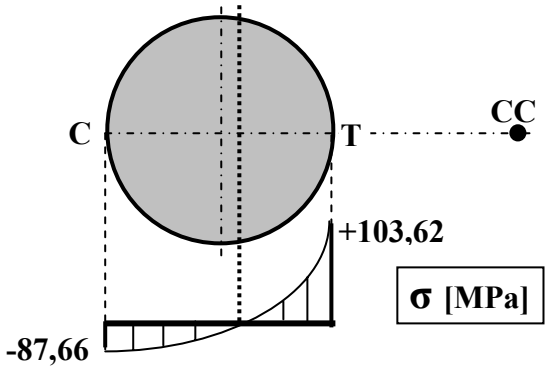
b) $\sigma_{max,c}$ = -24,57 MPa



8.3-6

a) N = + F, M_i = 2FR, e ≈ 3,33 mm, y_T = 16,67 mm, r_T = 100 mm, y_C = 23,33 mm, r_C = 140 mm, $\sigma_{max,t}$ = +103,62 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -87,66 MPa

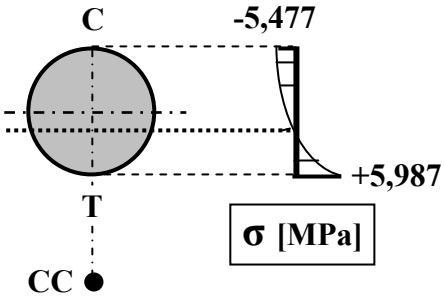
b)



8.3-7

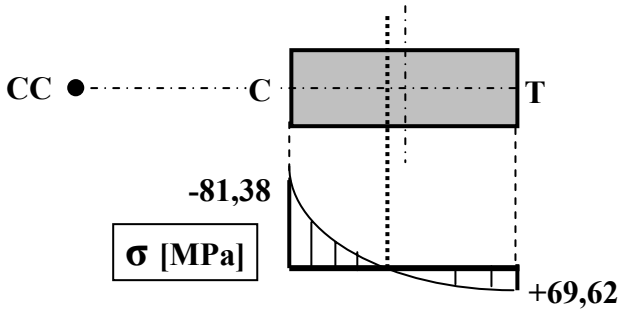
a) N = + 8 kN, M_i = 18 kN·m, e ≈ 10 mm, y_T = 90 mm, r_T = 900 mm, y_C = 110 mm, r_C = 1.100 mm, $\sigma_{max,t}$ = +5,987 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -5,477 MPa

b)



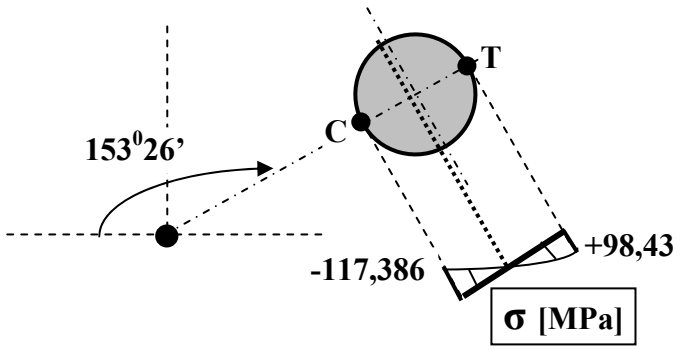
8.3-8

a) N = - F, M_i = 3FR, e ≈ 1 mm, y_T = 42 mm, r_T = 330 mm, y_C = 18 mm, r_C = 270 mm, $\sigma_{max,t}$ = +71,212 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -50 MPa
b)



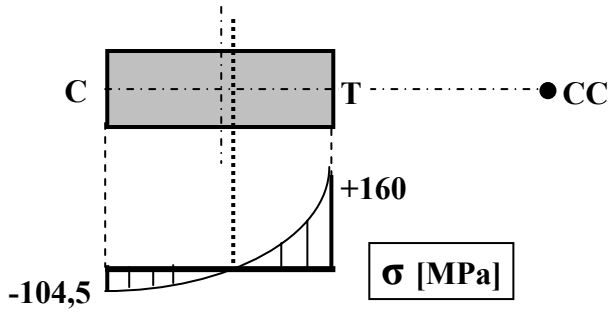
8.3-9

a) N = - 2,2361F, M_i = 4,2361FR (la φ = $153^0$26'), e ≈ 5 mm, y_T = 35 mm, r_T = 210 mm, y_C = 25 mm, r_C = 150 mm, $\sigma_{max,t}$ = +98,43 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -117,386 MPa
b)



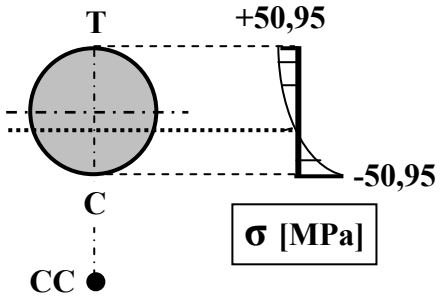
8.3-10

a) N = + F, M_i = 2FR, e ≈ 8,33 mm, y_T = 91,67 mm, r_T = 300 mm, y_C = 108,33 mm, r_C = 500 mm, F_{cap} = 105,55 kN
b) $\sigma_{max,c}$ = -104,5 MPa



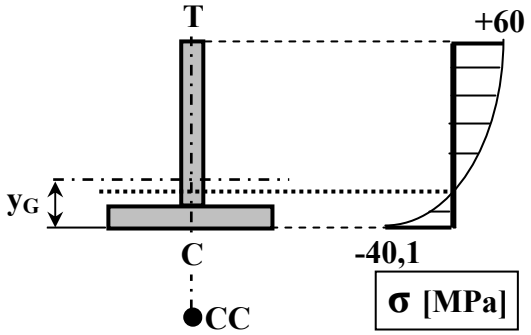
8.3-11

a) N = 0, M_i = 2FR, e ≈ 5 mm, y_T = 55 mm, r_T = 550 mm, y_C = 45 mm, r_C = 450 mm, $\sigma_{max,t}$ = +50,95 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -50,95 MPa
b)



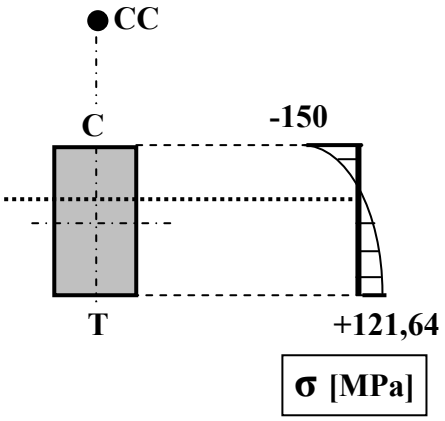
8.3-12

a) N = - F, M_i = 28,5F, y_G = 2,25t, e ≈ 0,34t, y_T = 5,09t, r_T = 19t, y_C = 1,91t, r_C = 12t, F_{cap} = 3,355 kN
b) σ_{maxc} = -40,1 MPa



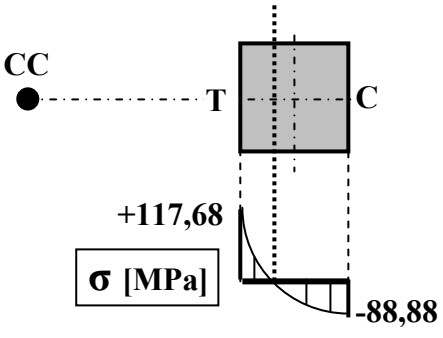
8.3-13

a) N = - F, M_i = 2FR, e ≈ 1,67 mm, y_T = 41,67 mm, r_T = 360 mm, y_C = 38,33 mm, r_C = 280 mm, F_{cap} = 8,978 kN
b) σ_{maxc} = 121,64 MPa



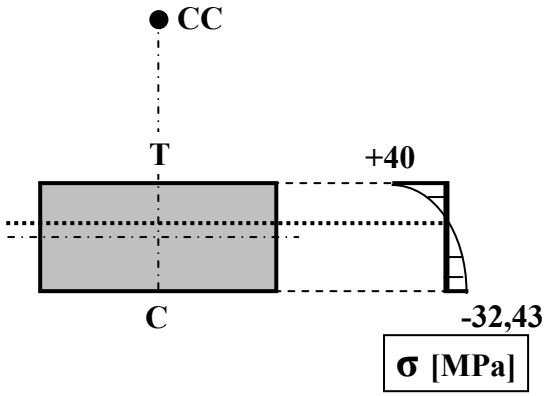
8.3-14

a) N = +F, M_i = 2FR, e ≈ 2,22 mm, y_T = 37,78 mm, r_T = 200 mm, y_C = 42,22 mm, r_C = 280 mm, $\sigma_{max,t}$ = +117,68 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -88,88 MPa
b)



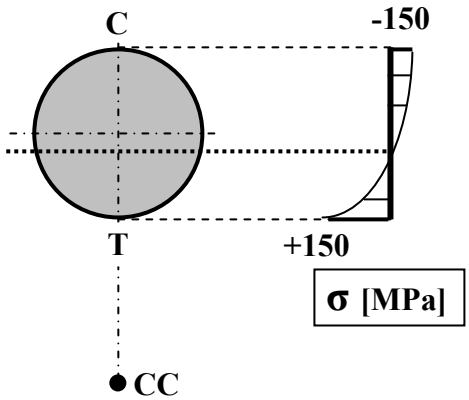
8.3-15

a) N = + F, M_i = 2FR, e ≈ 1,04 mm, y_T = 23,96 mm, r_T = 175 mm, y_C = 26,04 mm, r_C = 225 mm, F_{cap} = 3,727 kN
b) σ_{maxc} = -32,43 MPa



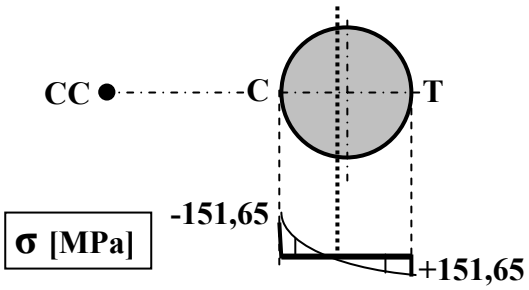
8.3-16

a) N = 0, M_i = M, e ≈ 5 mm, y_T = 35 mm, r_T = 150 mm, y_C = 25 mm, r_C = 210 mm, M_{cap} = 12,717 kN
b) σ_{maxc} = -150 MPa



8.3-17

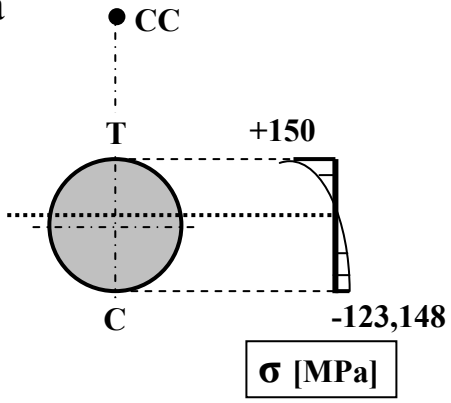
a) Secțiunea periculoasă este secțiunea 1 (unde acționează forța F): N = 0, M_i = 0,182 FR, e ≈ 1,67 mm, y_T = 11,67 mm, r_T = 70 mm, y_C = 8,33 mm, r_C = 50 mm, $\sigma_{max,t}$ = +151,65 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -151,65 MPa
b)



8.3-18

a) N = + F, M_i = FR, e ≈ 2 mm, y_T = 18 mm, r_T = 180 mm, y_C = 22 mm, r_C = 220 mm, F_{cap} = 17,186 kN

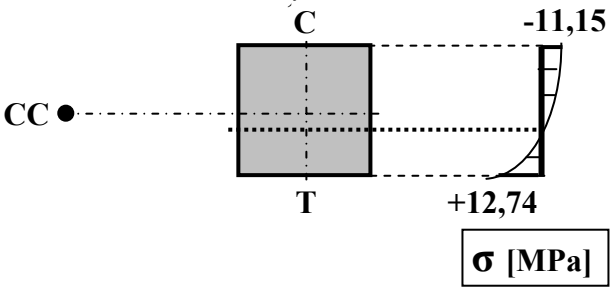
b) σ_{maxc} = -123,148 MPa



8.3-19

a) Secțiunea periculoasă este secțiunea 1 (unde acționează forța F): N = 0, M_i = 0,318 FR, e ≈ 0,67 mm, y_T = 19,33 mm, r_T = 180 mm, y_C = 20,67 mm, r_C = 220 mm, $\sigma_{max,t}$ = +12,74 MPa, $\sigma_{max,c}$ = -11,15 MPa

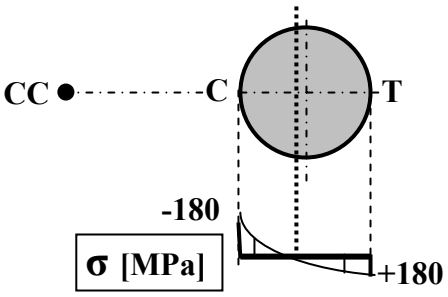
b) Bara dublu înțepenită este mai avantajoasă decât simplu rezemată (vezi Problema 8.3-3).



8.3-20

a) Secțiunea periculoasă este secțiunea 1 (unde acționează forța F): N = 0, M_i = 0,385 FR, e ≈ 1,25 mm, y_T = 11,25 mm, r_T = 90 mm, y_C = 8,75 mm, r_C = 700 mm, F_{cap} = 18,35 kN

b) $\sigma_{max,c}$ = -180 MPa



8.4 Calculul la flambaj al barelor drepte zvelte solicitate la compresiune

8.4-1

a) $l_f = 2 \cdot a = 6$ m, $I_{min} = 427 \cdot 10^4$ mm^4, $i_{min} = 29{,}15$ mm, $\lambda = 206$, $F_{cr} = 140{,}477$ kN
b) $l_f = 2 \cdot a$, $I_{min} = 63{,}61725 \cdot 10^4$ mm^4, $i_{min} = 15$ mm, $\lambda = 400$, $F_{cr} = 20{,}929$ kN
c) $l_f = 2 \cdot a$, $I_{min} = 523{,}598 \cdot 10^4$ mm^4, $i_{min} = 25$ mm, $\lambda = 240$, $F_{cr} = 172{,}2568$ kN

8.4-2

$l_f = 2 \cdot a = 6$ m, $I_{min} = 1017{,}876 \cdot 10^4$ mm^4, $i_{min} = 30$ mm, $\lambda = 200$, $F_{cr} = 558{,}1129$ kN, $c_f = 3{,}488 > c_{af}$

8.4-3

$l_f = 0{,}5 \cdot a = 2{,}5$ m, $i_{min} = 36$ mm, $\lambda = 69{,}44 < \lambda_0$, $\sigma_{cr} = 230{,}833$ MPa, $A = 63{,}8321 \cdot 10^2$ mm^2, $F_{cr} = 1473{,}456$ kN, $c_f = 3{,}683 > c_{af}$

8.4-4

$l_f = 0{,}7 \cdot a = 3{,}5$ m, $i_{min} = 31{,}35$ mm, $\lambda = 111{,}64 > \lambda_0$, $F_{cr} = 1.869{,}182$ kN, $F_{cap} = 623{,}06$ kN

8.4-5

$I_{min} = 10^7$ mm^4, $A = 12.000$ mm^2, $i_{min} = 28{,}8675$ mm
a) $l_f = a = 4$ m, $\lambda = 138{,}56 > \lambda_0$, $F_{cr} = 61{,}685$ kN, $F_{cap} = 12{,}337$ kN

b) $l_f = 0{,}5 \cdot a = 2$ m, $\lambda = 69{,}28 < \lambda_0$, $F_{cr} = 186{,}44$ kN, $F_{cap} = 37{,}28$ kN
c) varianta b)

8.4-6

$l_f = 0{,}7 \cdot a = 1{,}75$ m, d = 37 mm, $i_{min} = 9{,}25$ mm, $\lambda_{ef} = 189{,}18 > \lambda_0$ $\Rightarrow$ d = 37 mm

8.4-7

$l_f = 2 \cdot a = 12$ m
a) d = 173 mm, $i_{min} = 18{,}25$ mm, $\lambda_{ef} = 277{,}54 > \lambda_0 \Rightarrow$ d = 173 mm
b) a = 152 mm, $\lambda_{ef} = 273{,}48 > \lambda_0 \Rightarrow$ d = 152 mm

8.4-8

a) $l_f = a = 4$ m, $i_{min} = 25$ mm, $\lambda = 160 > \lambda_0$, $F_{cr} = 605{,}59$ kN
b) $F_{cap} = 121{,}1$ kN

8.4-9

$l_f = 0{,}5 \cdot a = 2$ m, $i_{min} = 20$ mm, $\lambda = 100 = \lambda_0$, $F_{cr} = 992{,}2$ kN, $N_T = 100{,}5309$ kN, $c_f = 9{,}8 > c_{af} = 6$

8.4-10

$i_{min} = 20$ mm, $I_{min} = 201{,}06 \cdot 10^4$ mm^4, A = 5024 mm^2
a) Varianta a): $l_f = a = 3$ m, $\lambda = 150 > \lambda_0$, $F_{cr} = 440{,}978$ kN
Varianta b): $l_f = 0{,}7 \cdot a = 2{,}1$ m, $\lambda = 104{,}873 > \lambda_0$, $F_{cr} = 902{,}13$ kN
Varianta c): $l_f = 2 \cdot a = 6$ m, $\lambda = 300 > \lambda_0$, $F_{cr} = 110{,}245$ kN

Varianta d): $l_f = 0,5 \cdot a = 1,5$ m, $\lambda = 75 < \lambda_0$, $F_{cr} = 1.127,88$ kN
b) varianta d)

8.4-11

Bara 1: $N_1 = 0,25 \cdot F$, $i_{min} = 5$ mm, $l_f = 4$ m, $\lambda = 800$, $F_{1,cap} = 1,291$ kN
Bara 2: $N_2 = 0,433 \cdot F$, $i_{min} = 2,886$ mm, $l_f = 2,3$ m, $\lambda = 796,95$, $F_{2,cap} = 0,479$ kN
$\Rightarrow F_{cap} = 0,479$ kN

8.4-12

$N_1 = +4,615$ kN (tracțiune), $N_2 = -6,923$ kN (compresiune)
Bara 1: tracțiune, $\sigma_{max,t} = +7,692$ MPa $< \sigma_{a,t}$
Bara 2: compresiune, $\sigma_{max,c} = -11,538$ MPa $< \sigma_{a,c}$, $l_f = l_2 = 3$ m, $I_{min} = 2 \cdot 10^4$ mm^4, $i_{min} = 5,773$ mm, $\lambda = 519,66 > \lambda_0$, $F_{cr} = 4,38$ kN $> N_2 \Rightarrow$ bara şi-a pierdut stabilitatea

8.4-13

Bara 1: $N_1 = -11,707$ kN (compresiune), $\sigma_{max,c} = -7,317$ MPa $< \sigma_{a,c}$, $l_f = l_1 = 2$ m, $I_{min} = 21,333 \cdot 10^4$ mm^4, $i_{min} = 11,54$ mm, $\lambda = 173,31 > \lambda_0$, $F_{cr} = 105,27$ kN $> N_2$, $c_f = 9 > c_{af}$
Bara 2: $N_2 = +4,878$ kN (tracțiune), $\sigma_{max,t} = +4,878$ MPa $< \sigma_{a,t}$

8.4-14

Bara 1: $N_1 = +18,75$ kN (tracțiune), $\sigma_{max,t} = +15,625$ MPa $< \sigma_{a,t}$
Bara 2: $N_2 = -37,5$ kN (compresiune), $\sigma_{max,c} = -15,625$ MPa $< \sigma_{a,c}$, $I_{min} = 32 \cdot 10^4$ mm^4, $i_{min} = 11,547$ mm, $\lambda = 259,8 > \lambda_0$, $F_{cr} = 70,1838$ kN $> N_2$, $c_f = 1,87 < c_{af}$

8.4-15

Bara 1: N_1 = +0,3615 F (tracțiune), $F_{1,cap}$ = 1.493,775 kN
Bara 2: N_2 = -0,42566 F (compresiune), $F_{2,cap}$ = 995,865 kN (condiția de rezistență), i_{min} = 13,29 mm, λ = 210,6 > λ_0, F_{cr} = 376,29 kN, $F_{3,cap}$ = 75,258 kN (condiția de stabilitate) $\Rightarrow$ F_{cap} = 75,258 kN

8.4-16

Bara 1: N_1 = +96 kN (întindere), $\sigma_{max,t}$ = +76,433 MPa < σ_{at}
Bara 2: N_2 = -48 kN (compresiune), $\sigma_{max,c}$ = -38,217 MPa < $\sigma_{ac,}$ i_{min} = 10 mm, λ = 300 > λ_0, F_{cr} = 27,547 kN < N_2, c_f = 0,573 < 1 $\Rightarrow$ bara 2 deşi satisface condiția de rezistență nu o satisface pe cea de stabilitate

8.4-17

Bara 1: N_1 = -0,1818 F (compresiune), I_{min} = $0{,}785 \cdot 10^4$ mm^4, i_{min} = 5 mm, F_{cr} = 3,8738 kN, F_{1cap} = 7,102 kN
Bara 2: N_2 = -0,48485 F (compresiune), I_{min} = $12{,}56 \cdot 10^4$ mm^4, i_{min} = 10 mm, F_{cr} = 27,54 kN, F_{2cap} = 18,9336 kN
$\Rightarrow$ F_{cap} = 7,102 kN

8.4-18

Bara 1: N_1 = -31,11 kN (compresiune), $\sigma_{max,c}$ = -34,568 MPa, I_{min} = $6{,}67 \cdot 10^4$ mm^4, i_{min} = 8,66 mm, λ = 80,829 < λ_0, F_{cr} = 196,069 kN, $c_{1,f}$ = 6,302 > c_{af}

Bara 2: N_2 = -7,778 kN (compresiune), $\sigma_{max,c}$ = -8,624 MPa, I_{min} = $6{,}67\cdot10^4$ mm^4, i_{min} = 8,66 mm, λ = 230,946 > λ_0, F_{cr} = 33,3099 kN, $c_{2,f}$ = 3,862 > c_{af}

8.4-19

Bara 1: N_1 = 0,3 F (compresiune), I_{min} = $26{,}67\cdot10^4$ mm^4, i_{min} = 11,547 mm, λ = 244,91 < λ_0, F_{cr} = 67,148 kN, F_{1cap} = 223,826 kN
Bara 2: N_2 = 0,6 F kN (compresiune), I_{min} = $26{,}67\cdot10^4$ mm^4, i_{min} = 11,547 mm, λ = 346, 41 > λ_0, F_{cr} = 32,9 kN, F_{2cap} = 54,83 kN $\Rightarrow$ F_{cap} = 54,83 kN.

8.4-20

Bara 1: N_1 = -6,8052 kN (compresiune), $\sigma_{max,c}$ = -13,85 MPa, I_{min} = $1{,}91747\cdot10^4$ mm^4, i_{min} = 6,25 mm, λ = 336 > λ_0, F_{cr} = 8,5826 kN > N_1, $c_{1,f}$ = 1,26 $\Rightarrow$ stabilă dar insuficient
Bara 2: N_2 = -6,528 kN (compresiune), $\sigma_{max,c}$ = -20,789 MPa, I_{min} = $0{,}78539\cdot10^4$ mm^4, i_{min} = 5 mm, λ = 400,946 > λ_0, F_{cr} = 3,875 kN < N_2, $c_{2,f}$ = 0,619 $\Rightarrow$ instabilă

8.4-21

Bara 1: N_1 = -24,406 kN (compresiune), $\sigma_{max,c}$ = -19,432 MPa < σ_{ac}, I_{min} = $12{,}566\cdot10^4$ mm^4, i_{min} = 10 mm, λ = 300 > λ_0, F_{cr} = 27,56 kN > N_1, $c_{1,f}$ = 1,12 $\Rightarrow$ stabilă dar insuficient
Bara 2: N_2 = +13,728 kN (întindere), $\sigma_{max,t}$ = +43,719 MPa < σ_{at}

8.4-22

Bara 1: N_1 = -26,667 kN (compresiune), $\sigma_{max,c}$ = -37,726 MPa < σ_{ac}, I_{min} = $3{,}976\cdot10^4$ mm^4, i_{min} = 7,5 mm, λ = 200 > λ_0, F_{cr} = 78,483 kN > N_1, $c_{1,f}$ = 2,943 > c_{af} $\Rightarrow$ stabilă
Bara 2: N_2 = +6,667 kN (întindere), $\sigma_{max,t}$ = +9,431 MPa < σ_{at}.

8.5 Calculul elementelor de rezistență solicitate prin şocuri

8.5-1

a) N = 50 daN, $\sigma_{st,max}$ 1,59 MPa, $\delta_{st} = 1{,}19\cdot10^{-2}$ mm, $\Psi_{nec} = 94{,}2$, h = 52,9 mm
b) 2,25 mm

8.5-2

$N_1 = 0{,}4\cdot Q$, $N_2 = 0{,}4\cdot Q$, $\sigma_{st1,max} = \sigma_{st2,max} = 1{,}2738\cdot10^{-3}\cdot Q$, $\delta_{st} = 1{,}2738\cdot10^{-5}\cdot Q$, Q = 1,5701 kN

8.5-3

a) $N_1 = 0{,}06\cdot Q$, $N_2 = 0{,}72\cdot Q$, $\sigma_{st1,max} = 1{,}9108\cdot10^{-4}\cdot Q$, $\sigma_{st2,max} = 2\cdot10^{-4}\cdot Q > \sigma_{st1,max}$, $\delta_{st} = 4{,}2993\cdot10^{-6}\cdot Q = 12{,}8979\cdot10^{-3}$ mm, $\Psi = 250{,}0514$, $\sigma_{max} = \sigma_{2,d} = 150{,}03$ MPa
b) $\delta_{max} = 3{,}225$ mm

8.5-4

c) a) $N_1 = 1{,}732\cdot Q = N_2$, $N_3 = 3\cdot Q$, $\sigma_{st3,max} = \sigma_{st,max} = 1{,}492\cdot10^{-2}\cdot Q = 14{,}92$ MPa $> \sigma_{st1,2,max}$, $\delta_{st} = 0{,}37318$ mm, $\Psi = 10{,}0536$, h = 15,107 mm
d) $\delta_{max} = 3{,}75$ mm

8.5.5

a) $N_1 = 1{,}5\cdot Q$, $N_2 = 2{,}1185\cdot Q$, $N_3 = 1{,}5\cdot Q$, $\sigma_{st2,max} = \sigma_{st,max} = 6{,}7468\cdot10^{-3}\cdot Q > \sigma_{st1,3,max}$, $\delta_{st} = 10{,}7601\cdot10^{-5}\cdot Q$, $Q_{max} = 53{,}186$ daN
b) $\Psi = 41{,}8$, $\delta_{st,max} = 0{,}056941$ mm, $\delta_{max} = 2{,}38$ mm

8.5-6

a) $N_1 = 1{,}4142 \cdot Q$, $N_2 = Q < N_1 = 7{,}071$ daN, $\sigma_{st1,max} = \sigma_{st,max} = 0{,}9$ MPa, $\delta_{st} = 4{,}515 \cdot 10^{-3}$ mm, $\Psi_{nec} = 166{,}67$, $h_{max} = 62$ mm
b) $\delta_{max} = 0{,}7525$ mm

8.5-7

c) $N_1 = 0{,}91925 \cdot Q$, $N_2 = 1{,}04 \cdot Q$, $\sigma_{st1,max} = 1{,}3005 \cdot 10^{-3} \cdot Q$, $\sigma_{st2,max} = 1{,}7333 \cdot 10^{-3} \cdot Q = \sigma_{st,max} = 3{,}4667$ MPa, $\delta_{st} = 3{,}9017 \cdot 10^{-5} \cdot Q$, $\Psi_{nec} = 51{,}924$, $h_{max} = 101{,}14$ mm
d) $\sigma_{1,max} = 135{,}054$ MPa

8.5-8

$\delta_{st} = Qa^3/48EI_z = Qa/EA = 7{,}961$ mm, $\sigma_{st,max} = Q/A + Qa/W_z = 31{,}863$ MPa, $\Psi = 8{,}158$, $\delta_{max} = 64{,}945$ mm

8.5-9

$\delta_{st} = Qa^3/48EI_z + Qa/4EA = 1{,}8568$ mm, $\Psi = 15{,}71$, $\sigma_{st,max,gr} = Qa/2W_z = 33{,}33$ MPa, $\sigma_{st,max,b} = Q/A = 0{,}5$ MPa, $\sigma_{max,gr} = 523{,}3$ MPa, $\sigma_{max,b} = 7{,}89$ MPa

8.5-10

Varianta a) $\sigma_{st,max,gr} = Qa/2W_z = 9{,}375$ MPa, $\delta_{st} = Qa^3/48EI_z = 1{,}562$ mm, $\Psi_{nec} = 16$, $h_{1,max} = 174{,}9$ mm
Varianta b) $\sigma_{st,max,gr} = Qa/2W_z = 37{,}5$ MPa, $\delta_{st} = Qa^3/48EI_z = 25$ mm, $\Psi_{nec} = 4$, $h_{2,max} = 100$ mm
Varianta a) este mai convenabilă

8.5-11

a) $X_1 = 41Q/88 = 186{,}363$ daN, $I_z = 170{,}67\cdot10^4$ mm^4, $W_z = 42{,}67\cdot10^3$ mm^3, $\delta_{st} = 0{,}1356\ Qa^3/EI_z = 0{,}4117$ mm, $\Psi = 12$, $\sigma_{st,max} = 21{,}837$ MPa, $\sigma_{max} = \Psi\cdot\sigma_{st,max} = 77{,}346$ MPa

b) $\delta_{max} = \delta_{st}\cdot\Psi = 4{,}94$ mm

8.5-12

$\delta_{st} = Qa^3/EI_z = 0{,}0868$ mm, $W_z = 24\cdot10^3$ mm^3, $M_{i,max} = Qa$, $\sigma_{st,max} = 2{,}08$ MPa, $\Psi_{nec} = 76{,}923$, $h_{max} = 249{,}33$ mm

8.5-13

$\sigma_{st,max} = 5{,}2964$ MPa, $\delta_{st} = 0{,}1872$ mm, $\Psi_{nec} = 28{,}32$, $h_{max} \cong 75$ mm, $\delta_{max} = 5{,}3$ mm

8.5-14

a) $X_1 = 29Q/14 \approx 2Q = 160$ daN, $\sigma_{st,max} = Qa/W_z = 4{,}486$ MPa, $\delta_{st} \cong Qa^3/3EI_z = 6{,}23\cdot10^{-2}$ mm, $\Psi_{nec} = 33{,}437$, $h_{max} \cong 32{,}74$ mm

b) $\delta_{max} = \delta_{st}\cdot\Psi \cong 2{,}083$ mm

8.5-15

a) $\Psi = 1 + [1 + v^2/g\cdot\delta_{st}]^{1/2}$, $I_z = 3{,}7677\cdot10^6$ mm^4, $\delta_{st} = 4{,}12$ mm, $\Psi = 8{,}03$, $\sigma_{st,max} = 23{,}66$ MPa, $\sigma_{max} = \Psi\cdot\sigma_{st,max} = 189{,}97$ MPa

b) $\varphi_{st,B} = 0{,}111$ rad, $\varphi_{max,B} = \Psi\cdot\varphi_{st,B} = 0{,}891$ rad $= 51{,}07^0$

8.5-16

$M_{i,max} = Q\cdot a$, $I_z = 320\cdot10^4$ mm^4, $W_{z,min} = 16\cdot10^4$ mm^3, $\sigma_{st,max} = 6{,}25$ MPa, $\delta_{st,gr} = 2Qa^3/3E_{gr}\ I_{gr} = 1{,}042$ mm, $f_{arc} = 21{,}6$ mm, $\delta_{st} = 2\cdot f + \delta_{st,gr} = 44{,}242$ mm, $\Psi = 4{,}168$, $\sigma_{max} = \Psi\cdot\sigma_{st,max} = 26{,}05$ MPa

8.5-17

$\sigma_{st,max}$ = 84,112 MPa, δ_{st} = 0, Ψ = 2, $\sigma_{max} = \Psi \cdot \sigma_{st,max}$ =168,224 MPa

8.5-18

a) $\sigma_{st,max}$ = 0,03125 MPa, $\delta_{st} = 1{,}3 \cdot 10^{-4}$ mm, Ψ = 2.774,5, $\sigma_{max} = \Psi \cdot \sigma_{st,max}$ = 86,7 MPa
b) $\delta_{max} = \delta_{st} \cdot \psi$ =0,36 mm

8.5-19

a) $X_1 = M_{i,1} = Qa/4$, $M_{iz,max} = Qa/4$, $\sigma_{st,max} = M_{iz,max}/W_z$ = 12,21 MPa, $\delta_{st} = Qa^3/24EI_z$ = 0,29 mm, Ψ = 27,28, $\sigma_{max} = \Psi \cdot \sigma_{st,max}$ = 333 MPa
b) $\delta_{max} = \Psi \cdot \delta_{st}$ = 7,911 mm

8.5-20

a) $X_1 = M_{i,1} = Qa/2$, $M_{iz,max} = Qa/2$, $\sigma_{st,max} = M_{iz,max}/W_z$ = 10,191 MPa, $\delta_{st} = Qa^3/3EI_z$ = 0,679 mm, Ψ_{nec} = 14,7118, h_{max} = 63,5 mm
b) $\delta_{max} = \Psi \cdot \delta_{st} \approx$ 10 mm.

8.6 Calculul la solicitări variabile (oboseală)

8.6-1

σ_{max} = 94,36 MPa, σ_{min} = -94,36 MPa, τ_{max} = 94,36 MPa, τ_{min} = -94,36 MPa, σ_{am} = 94,36 MPa, σ_m = 0, τ_{am} = 94,36 MPa, τ_m = 0, c_σ = 2,18, c_τ = 1,52, c = 1,24 < c_a

8.6-2

σ_{max} = 119,42 MPa, σ_{min} = 39,8 MPa, τ_{max} = 49,76 MPa, τ_{min} = 0, σ_{am} = 79,61 MPa, σ_m = 39,81, τ_{am} = 49,76 MPa, τ_m = 24,88 MPa, c_σ = 2,02, c_τ = 1,62, c = 1,26

8.6-3

σ_{max} = 81,57 MPa, σ_{min} = 0, τ_{max} = 40,785 MPa, τ_{min} = -40,785 MPa, σ_{am} = 81,57 MPa, σ_m = 40,785 MPa, τ_{am} = 40,785 MPa, τ_m = 0, c_σ = 1,68, c_τ = 2,05, c = 1,3

8.6-4

σ_{max} = 128,29 MPa, σ_{min} = 0, τ_{max} = 42,76 MPa, τ_{min} = 0, σ_{am} = 64,145 MPa, σ_m = 64,145 MPa, τ_{am} = 21,38 MPa, τ_m = 21,30; c_σ = 1,41; c_τ = 3,143; c = 1,286

8.6-5

M_i = 500 F, M_t = 300 F, $\sigma_{max} = 2{,}359\cdot10^{-2}\ F_{max}$, σ_{min} = 0, $\tau_{max} = 7{,}077\cdot10^{-3}\ F_{max}$, τ_{min} = 0, $\sigma_{am} = 1{,}179\cdot10^{-2}\ F_{max}$, $\sigma_m = 1{,}179\cdot10^{-2}\ F_{max}$, $\tau_{am} = 3{,}538\cdot10^{-3}\ F_{max}$, $\tau_m = 1{,}179\cdot10^{-2}\ F_{max}$; c_σ =

$16{,}3852\cdot10^3$ / F_{max}, $c_\tau = 22{,}264\cdot10^3$ / F_{max}; $c = 13{,}1968\cdot10^3$/ F_{max}, $F_{max} = 8{,}247$ kN

8.6-6

$M_t = F\cdot R$, $W_p = 5\pi\cdot10^3$ mm^3, $\tau_{max} = 38{,}217$ MPa, $\tau_{min} = 25{,}47$ MPa, $\tau_{am} = 6{,}3735$ MPa, $\tau_m = 31{,}843$ MPa, $\Psi_\tau = 0{,}5$; $c_\tau = 1{,}08$ (un coeficient de siguranță la oboseală nesatisfăcător)

8.6-7

$M_{i,max} = Fa/2$, $\sigma_{max} = 1{,}5923\cdot10^{-2}$ F = 63,69 MPa, $\sigma_{min} = -1{,}5923\cdot10^{-2}$ F = -63,69 MPa, $\sigma_{am} = \sigma_{max} = 63{,}69$ MPa, $\sigma_m = 0$, $c_\sigma = 2{,}96$

8.6-8

N = F, A = 2.106 mm^2, $\sigma_{max} = 38$ MPa, $\sigma_{min} = 4{,}75$ MPa, $\sigma_{am} = 16{,}625$ MPa, $\sigma_m = 21{,}375$ MPa, $c_\sigma = 5{,}03$

8.6-9

a) $M_i = F\cdot a$, $W_z = 87{,}491\cdot10^3$ mm^3, $\sigma_{max} = 91{,}438$ MPa, $\sigma_{min} = -91{,}438$ MPa, $\sigma_{am} = \sigma_{max} = 91{,}438$ MPa, $\sigma_m = 0$, $c_\sigma = 1{,}286$
b) $M_i = F/2\cdot a$, $W_z = 71{,}533\cdot10^3$ mm^3, $\sigma_{max} = 55{,}918$ MPa, $\sigma_{min} = -55{,}918$ MPa, $\sigma_{am} = \sigma_{max} = 55{,}918$ MPa, $\sigma_m = 0$, $c_\sigma = 1{,}91$

8.6-10

$M_i = 2Fa$, $M_t = Fa$, $W_z = 21{,}195\cdot10^3$ mm^3, $\sigma_{max} = 84{,}925$ MPa, $\sigma_{min} = -28{,}308$ MPa, $\sigma_{am} = 56{,}616$ MPa, $\sigma_m = 28{,}308$ MPa, $c_\sigma = 2{,}185$; $W_p = 42{,}39\cdot10^3$ mm^3, $\tau_{max} = 21{,}231$ MPa, $\tau_{min} = -7{,}077$ MPa, $\tau_{am} = 14{,}154$ MPa, $\tau_m = 7{,}077$ MPa, $c_\tau = 5{,}177$; $c = 2{,}013$.

BIBLIOGRAFIE

1. Babeu T: *Rezistența materialelor*, Lito I.P."T.V" Timişoara, 1980

2. Beleaev N. M: *Rezistența materialelor*, Vol. I - II, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1956

3. Buga M. N., ş. a. *Probleme alese din rezistența materialelor*. lito. U. P. Bucureşti, 1995

4. Buzdugan Gh: *Rezistența materialelor*, Ed. Academiei R.S.R. Bucureşti, 1986

5. Deutsch I, Goia I, Curtu I, Neamțu T, Sperchez F: *Probleme de rezistența materialelor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983

6. Dumitru I, Neguț N: *Curs de Rezistența Materialelor*, Lito I.P. "T.V." Timişoara, 1984

7. Hajdu I: *RezistențamMaterialelor*, Lito I.P. "T.V." Timişoara, 1983

8. Hluşcu M. *Culegere de probleme din rezistența materialelor*, Lito U. P. Timişoara, 1995

9. Miroliubov I., ş. a. *Resistance des materiaux*, Editions MIR, Moscou, 1971

10. Ryder G. H., *Strength of Materials*, Macmillan; Third Edition in S. I. Units, 1969

11. Tripa P: *Etape şi modele de rezolvare a problemelor de rezistența materialelor* - reacțiuni, diagrame de eforturi, caracteristici geometrice, solicitări simple -, Ed. MIRTON Timişoara, 1999, REZMAT - 15

12. Tripa P, Hluşcu M: *Rezistența materialelor. Noțiuni fundamentale şi aplicații*, Vol. I, Editura "MIRTON", Timişoara, 2006

13. VOINEA R, VOICULESCU D, SIMION F.P: *Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie*, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989

14. * * * *Probleme date la concursul studențesc „C. C. Teodorescu" la Rezistența materialelor* - fază locală şi fază națională

C U P R I N S

Prefață 3
1. CALCULUL DE REZISTENȚĂ LA ÎNCOVOIERE OBLICĂ …… 5
1.1. Considerații generale. Etape de calcul ……..... 5
1.2 Modele de probleme rezolvate ……... 12
2. CALCULUL DE REZISTENȚĂ LA SOLICITĂRI COMPUSE …….. 28
2.1 Considerații generale. Tipuri de solicitări compuse ……... 28
2.2 Solicitarea compusă de categoria I ……. 28
2.2.1 Considerații generale. Etape de calcul …….. 28
2.2.2 Modele de probleme rezolvate ……. 33
2.3 Solicitarea compusă de categoria a II-a ……. 48
2.3.1 Considerații generale. Etape de calcul ……. 48
2.3.2 Modele de probleme rezolvate ……. 51
3. CALCULUL DEFORMAȚIILOR PRIN METODE ENERGETICE …..... 64
3.1 Deformațiile la încovoiere ale elementelor de rezistență …….. 64
3.2 Metoda sarcinii unitare (Mohr – Maxwell) pentru calculul deformațiilor …. 66
3.2.1 Considerații generale. Etape de calcul ……. 66
3.2.2 Modele de probleme rezolvate ……. 69
3.3 Metoda sarcinii unitare, procedeul Vereşceaghin pentru calculul deformațiilor …….. 78
3.3.1 Considerații generale. Etape de calcul …….. 78
3.3.2 Modele de probleme rezolvate ……. 81
3.4 Sisteme static nedeterminate, rezolvate prin metoda sarcinii unitare ……. 91
3.4.1 Considerații generale. Etape de calcul. Simetrii şi antisimetrii în sisteme static nedeterminate …….. 91
3.4.2 Modele de probleme rezolvate ……. 97
4. CALCULUL DE REZISTENȚĂ AL BARELOR CURBE PLANE …….. 131
4.1 Considerații generale. Etape de calcul …… 131
4.2 Modele de probleme rezolvate ……... 139
5. CALCULUL LA FLAMBAJ AL BARELOR DREPTE ZVELTE, SOLICITATE LA COMPRESIUNE ……. 153
5.1 Considerații generale. Etape de calcul …… 153
5.2 Modele de probleme rezolvate ……... 161
6. CALCULUL ELEMENTELOR DE REZISTENȚĂ SOLICITATE PRIN ŞOCURI …… 178
6.1 Considerații generale. Etape de calcul …… 178
6.2 Modele de probleme rezolvate ……... 183
7. CALCULUL LA SOLICITĂRI VARIABILE (OBOSEALĂ) …… 203
7.1 Considerații generale. Etape de calcul …… 203
7.2 Modele de probleme rezolvate ……... 215
8. A P L I C A Ț I I …….. 226

A. ENUNȚURI ……. 227
8.1 Calculul de rezistență la încovoiere oblică şi solicitări compuse ….…….. 227
8.1.1 Solicitarea compusă de categoria I …….. 227
8.1.2 Solicitarea compusă de categoria a II-a ……... 243
8.2 Calculul deformațiilor prin metode energetice …….. 262
8.2.1 Sisteme static determinate ……... 262
8.2.2 Sisteme static nedeterminate 280

8.3 Calculul de rezistență al barelor curbe plane …… 298
8.4 Calculul la flambaj al barelor zvelte, solicitate la compresiune …….... 306
8.5 Calculul elementelor de rezistență solicitate prin şocuri ……... 314
8.6 Calculul la solicitări variabile (oboseală) ……..... 324

B. RĂSPUNSURI (Rezultate) ……. 329
8.1 Calculul de rezistență la încovoiere oblică şi solicitări compuse …….. 329
8.1.1 Solicitarea compusă de categoria I …….. 329
8.1.2 Solicitarea compusă de categoria a II-a ……... 344
8.2 Calculul deformațiilor prin metode energetice …….. 362
8.2.1 Sisteme static determinate ……... 362
8.2.2 Sisteme static nedeterminate 367
8.3 Calculul de rezistență al barelor curbe plane …… 391
8.4 Calculul la flambaj al barelor zvelte, solicitate la compresiune …….... 399
8.5 Calculul elementelor de rezistență solicitate prin şocuri ……... 404
8.6 Calculul la solicitări variabile (oboseală) ……..... 408
BIBLIOGRAFIE 410
CUPRINS ……. 411